

# **Operasjonsforsterkeren**

## En kort innføring og oversikt

Forelesningsnotat for

SIE3040 Reguleringssteknikk med elektriske kretser

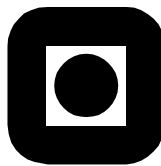
ved

Odd Pettersen

1. utgave

April 2000

(noen korreksjoner mars 2003)



NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET

INSTITUTT FOR TEKNISK KYBERNETIKK

## INNHold

<b>Grunnleggende teori</b> . . . . .	<b>1</b>
Basis-egenskaper . . . . .	1
Tilbakekoplet forsterker . . . . .	2
<b>Noen vanlige koplinger med jordet pluss-inngang</b> . . . . .	<b>6</b>
Virtuelt nullpunkt . . . . .	6
Enkel tidskonstant . . . . .	7
Integrator . . . . .	8
Derivator . . . . .	10
Summeforsterker med variabel forsterkning . . . . .	11
<b>Noen koplinger med aktiv pluss-inngang</b> . . . . .	<b>12</b>
Ikke-inverterende forsterker . . . . .	12
Differensialforsterker . . . . .	12
<b>Filtere</b> . . . . .	<b>14</b>
Noen enkle første-ordens filtere . . . . .	14
Høyere ordens filtere . . . . .	15

### Litteratur:

Det henvises flere steder til læreboken:

Allan R. Hambley: Electrical Engineering - Principles and Applications.  
2. ed. 2002. Prentice-Hall. ISBN 0-13-061070-4.

Stoffet i dette kompendienotatet er selvstendig og kan leses uten sammenheng med den refererte læreboken. Dog forutsettes kjent generell grunnleggende forsterker-teori og andre forutgående kunnskaper. Vi kommer *ikke* inn på halvlederteknologi (div. transistortyper og -koplinger) og hvordan forsterkere realiseres, og stoffet behandler i så måte forsterkeren som en "black box".

---

# 1. Grunnleggende teori

## Basis-egenskaper

Operasjonsforsterkeren (populært gjerne kalt “opamp”) har følgende grunnegenskaper:

- Egenforsterkning: Meget høy, vanligvis  $10^6$  til  $10^8$ .
- Differensial inngang
- God linearitet når utgangsspenningen ligger innen sitt normale variasjonsområde, som gjerne er fra  $-10\text{ V}$  til  $+10\text{ V}$ .
- Høy båndbredde: Den skal gå fra DC (0 Hz) og gjerne opp til mellom 1 og 10 MHz.
- Forsterkerens amplitude- fase-frekvenskarakteristikk må i øvre ende av frekvensspekteret falle pent av med  $-1$ , dvs. 20 dB/oktav, for å sikre stabilitet ved vanlig forekommende tilbakekopplingsnettverk.
- Liten spennings-drift, dvs. inngangsspenningen bør ligge på 0 V når utgangsspenningen er 0 V.
- Høy inngangsimpedans og neglisjerbar inngangsstrøm.

Symbolet for en åpen forsterker, til venstre i figuren:

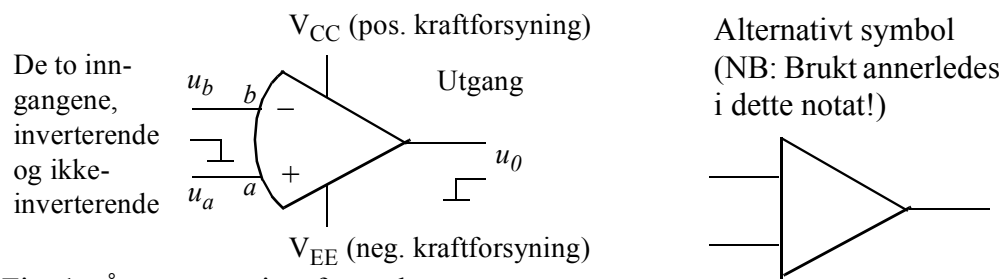


Fig. 1 Åpen operasjonsforsterker

I litteraturen brukes oftest det “alternative” symbol, men jeg foretrekker å reservere det til en *tilbakekoplet forsterker*, dvs. en operasjonsforsterker inkludert sine tilbakekopplings- og inngangs-impedanser. Mer om dette senere. Tilledningene for krafttilførselen blir vanligvis ikke vist, de regnes som selvsagte og trenger ikke videre kommentar. Returlledningene til 0 for inngangs- og utgangsklemmene, vist med symbolet  $\perp$  i Fig. 1, blir også oftest sløyfet. Ofte brukes bare den inverterende inngangen (-), mens pluss-inngangen er jordet.

## Tilbakekoplet forsterker

Operasjonsforsterkeren blir alltid brukt med **negativ tilbakekopling**<sup>1</sup>, og det er den nesten ubegrensede frihet til forskjellig utforming av tilbakekoplingen, sammen med mulighet til å oppnå ekstrem stor nøyaktighet, som gjør operasjonsforsterkeren til et så generelt anvendelig element.

Egenforsterkningen er meget høy, som nevnt foran. Den er forholdet mellom utgangsspenningen  $u_0$  og spenningen  $u_{ab}$  mellom inngangsklemmene:

$$u_0 = A \cdot (u_a - u_b) \quad (1)$$

Som allerede nevnt, brukes operasjonsforsterkeren ofte med pluss-inngangen jordet, og dermed blir utgangsspenningen i likning (1):

$$u_0 = -A \cdot u_b \quad (2)$$

I den følgende teori-behandlingen legger vi denne koplingen til grunn, for å gjøre behandlingen noe enklere. Det er lett etterpå å gjøre resultatet gjeldende for generelle koplinger, basert på begge inngangene.

I litteratur om operasjonsforsterkere blir virkemåten oftest beskrevet med ohmske motstander i tilbakekopling og innganger. Hvis man imidlertid baserer behandlingen på Laplacetransformasjon, kan man like godt bruke generelle impedanser, dvs.  $Z(s)$  i stedet for ohmske motstander  $R$ . På denne måten blir ohmske motstander spesialtilfeller.

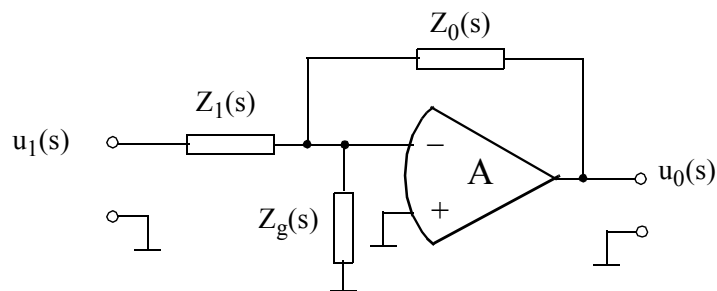


Fig. 2 Tilbakekoplet operasjonsforsterker

1. Med unntak av noen få og meget spesielle anvendelser, som i forhold til "normalbruken" ikke spiller noen som helst rolle, og som vi her ikke går mer inn på.

Tilbakekoplingsimpedansen betegnes altså  $Z_0(s)$ , og inngangsimpedansen  $Z_1(s)$ . Videre er vist inngangsimpedansen  $Z_g$  for selve forsterkeren.

Egenforsterkningen  $A$  er en funksjon av frekvensen, men det er en forutsetning for hele virkemåten at opamp'en benyttes langt under sin grensefrekvens, og der er forsterkningen meget høy (se listen i innledningen). Hvis disse vilkår overholdes, kan derfor ved alle utledninger omkring virkemåten egenforsterkningen betraktes som en konstant, med ukritisk verdi minst  $10^6$ . Dette vil også fremgå av følgende teoretiske betraktning, hvor vi først behandler  $A$  som  $A(j\omega)$  dvs. som en frekvensavhengig funksjon,  $A(s)$  i Laplace-transform.

Ved å betrakte forholdene i Fig. 2 som superposisjon av to spenningsdelere, kan vi lage et blokkdiagram for kretsen:

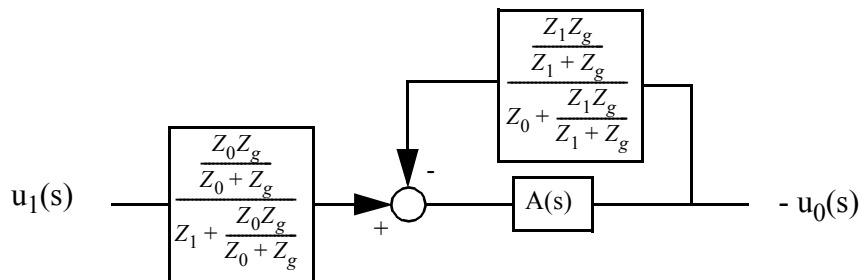


Fig. 3 Blokkdiagram

Vi innfører hjelpevariabelen  $Z'$  lik parallellkvivalenten av alle inngangsimpedanser, tilbakekoplingsimpedansen og selve forsterkerens inngangsimpedans  $Z_g$ , dvs.:

$$\frac{1}{Z'} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_g} \quad (3)$$

og får en forenkling av blokkdiagrammet:

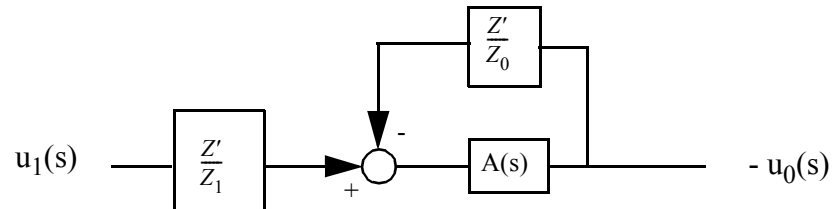


Fig. 4 Forenkling av blokkdiagrammet

som igjen kan forenkles til:

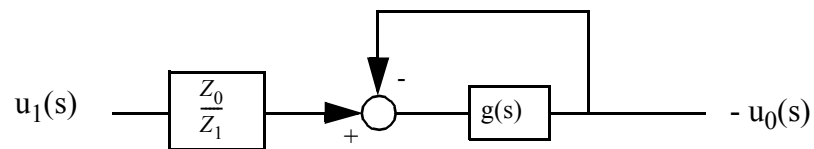


Fig. 5 Videre forenkling av blokkdiagrammet

Altså:

$$\frac{u_0(s)}{u_1(s)} = -\frac{Z_0}{Z_1}(s) \cdot \frac{g(s)}{1 + g(s)} \quad (4)$$

hvor

$$g(s) = A(s) \cdot \frac{Z'}{Z_0}(s) \quad (5)$$

Nå vil

$$g(s) \rightarrow A(s) \cdot \frac{Z_1}{Z_0 + Z_1} \quad \text{når } Z_g \rightarrow \infty \quad (6)$$

Dette viser at både høy "trinnforsterkning"  $\frac{Z_0}{Z_1}$  og stort antall innganger, såvel som selve forsterkerens inngangsimpedans bidrar til å redusere sløyfeforsterkningen, men siden forholdet sjelden er mer enn rundt 10, og egenforsterkningen  $A$  forutsetningsvis er minst  $10^6$ , vil sløyfeforsterkningen fremdeles være meget høy, minst  $10^5$ , så transferfunksjonen i likning (4) kan, innenfor forsterkerens båndbredde, med *meget* god tilnærming reduseres til

$$\frac{u_0(s)}{u_1(s)} = - \frac{Z_0(s)}{Z_1(s)} \quad (7)$$

Rent praktisk, uten å knytte det for mye opp mot matematikk, kan man også si at årsaken til at egenforsterkningen ikke spiller noen rolle bare den er stor nok, er at forsterkeren så godt som alltid blir brukt med negativ tilbakekopling. Impedansen  $Z_g$  er forsterkerens inngangsimpedans, men siden denne er høy og bare bidrar til noe reduksjon av sløyfeforsterkningen, opptrer den aldri i brukerorienterte figurer.

Koplingskjemaet for "praktisk bruk" for en tilbakekoplet operasjonsforsterker med jordet plussinngang blir derved redusert til:

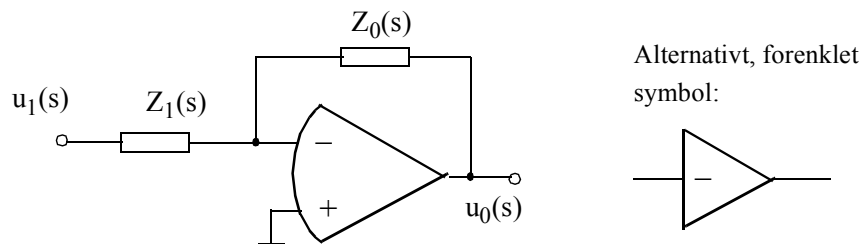


Fig. 6 Tilbakekoplet operasjonsforsterker

## 2. Noen vanlige koplinger med jordet pluss-inngang

Forsterkeren kan forsynes med flere inngangsklemmer:

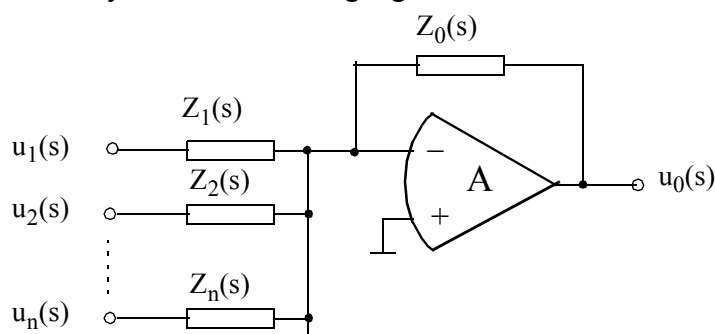


Fig. 7 Tilbakekoplet, summerende operasjonsforsterker

Utgangen blir derved summen av alle inngangene, hver veiet med sin tilhørende transferfunksjon:

$$u_0(s) = -\left(\frac{Z_0}{Z_1}u_1 + \frac{Z_0}{Z_2}u_2 + \dots + \frac{Z_0}{Z_n}u_n\right) \quad (8)$$

I likning (8) er operatorsymbolet (s) sløyfet for alle leddene på høyre side, som forenkling. Alle impedanser og inngangsspenninger er underforstått på Laplace-form.

### Virtuelt nullpunkt

Før vi går videre, skal vi her kort omtale en fundamental detalj, som brukeren normalt ikke trenger å bekymre seg med, men som det i visse tilfeller er viktig å være orientert om.

Når opamp'en arbeider innenfor sitt normale, lineære arbeidsområde, dvs. ikke går i metning, vil spenningsdifferensen mellom forsterkerens inngangspunkter dvs.  $(u_a - u_b)$  i Fig. 1 være:

$$u_{ab} = u_a - u_b = -\frac{u_0}{A} \quad (9)$$

Husk at  $A$  er i størrelsesorden  $> 10^6$ . Dette betyr at spenningsdifferensen  $u_{ab}$  er i størrelse høyst noen mikrovolt. Sett "utenfra", dvs. i forhold til sig-



nalspenningene  $u_0$ ,  $u_I$  osv. er altså inngangsspenningen 0. Med jordet plussinngang, er spenningen på minusinngangen *tilsynelatende null*. Inngangen er et *virtuelt nullpunkt*. Spenningen er null, til tross for at forsterkerinngangen ikke trekker strøm. Uttrykket Virtual-Short-Circuit i Hambley's bok kap. 14.3 (s. 612) er i så måte litt misvisende: det er ingen kortslutning, hvilket også Hambley påpeker.

Det er derfor bedre å bruke vårt uttrykk **virtuelt nullpunkt**, på engelsk *virtual zero*.

Denne verdien null *opptrer som følge av tilbakekoplingen*: Tilbakekoplingen innstiller koplingen i en balansetilstand.

## Enkel tidskonstant

Følgende kopling opptrer ofte:

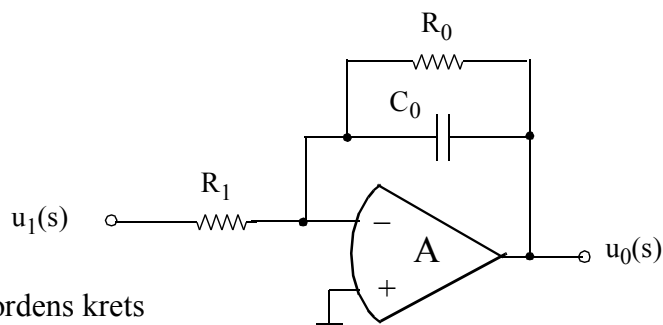


Fig. 8 Enkel førsteordens krets med tidskonstant

Transferfunksjonen finnes enkelt:

Først finner vi  $Z_0$  v.h.j.a. formel for parallellkopling:

$$Z_0 = \frac{R_0 \cdot \frac{1}{sC_0}}{R_0 + \frac{1}{sC_0}} = \frac{R_0}{1 + sC_0R_0} \quad (10)$$

Dermed blir transferfunksjonen:

$$\frac{u_0}{u_1}(s) = -\frac{R_0}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + sC_0R_0} = -\frac{R_0}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + Ts} \quad (11)$$

## Integrator

Som tilbakekopling velger vi en kondensator, mens inngangsimpedansen er ohmsk (resistiv, dvs. en resistans):

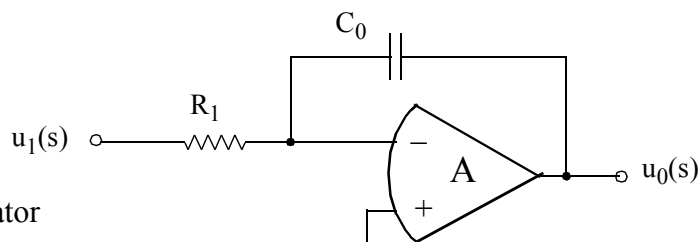


Fig. 9 Integrator

Impedansene er:

$$Z_0 = \frac{1}{sC_0}, \quad Z_1 = R_1 \quad (12)$$

Altså blir transferfunksjonen:

$$\frac{u_0}{u_1} = -\frac{\frac{1}{sC_0}}{R} = -\frac{1}{sCR} = -\frac{1}{Ts} \quad (13)$$

Produktet  $CR$  har dimensjon *tid*,  $T$  er altså integratorens *enhets-tidskonstant*. Den fri variable i integrasjonen er naturligvis tiden. Vi integrerer med hensyn på *tid* som fri variabel.

Vi har et forenklet symbol for integratoren, og her ser vi berettigelsen av å reservere det “alternative” symbolet i Fig. 1. For å slippe å tegne detaljene med kondensator osv., kan integratoren i Fig. 9 like så godt, og enklere, tegnes:

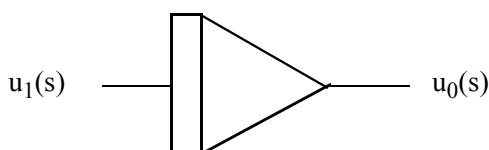


Fig. 10 Integrator, forenklet symbol

Nå er det imidlertid berettiget å spørre:

Hva med konstantverdien i integrasjonen?

Svaret er at koplingene i Fig. 9 og Fig. 10 er ufullstendige. Generelt trenger en integrator måter til resetting, til å påtrykke en startbetingelse, og til å starte og stoppe en integrasjon. Alt dette oppnås enkelt med koplingen i Fig. 11.

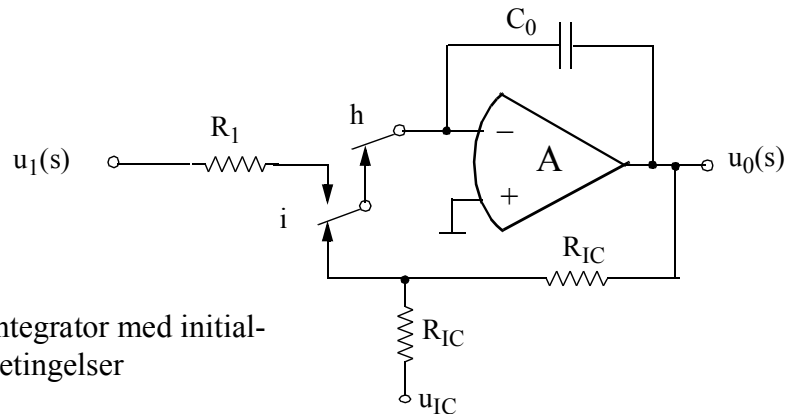


Fig. 11 Integrator med initialbetingelser

Koplingen i Fig. 11 inneholder to sett relefjærer: Ett rele  $I$  skifter mellom tilstand RESETT og INTEGRER, mens et annet rele  $H$  muliggjør HOLD. Opererer dette, vil integrasjonen “fryses”, integrasjonen stopper og integratorverdien  $u_0$  blir stående uforandret. I hvilestillingen av releet  $I$ , tilstanden

RESETT, er koplingen som en enkel førsteordens  $\frac{1}{1 + T_s}$  -krets. Tilkoplingsklemmen merket  $u_{IC}$  tilføres en konstant DC-spenningsverdi, integratorens startverdi eller *Initial Condition*. Tidskonstanten i IC-kretsen,  $T_{IC} = C_0 R_{IC}$  velges tilstrekkelig kort til at resettiden, den tid integratoren må stå i tilstand RESETT, blir ubetydelig. Dette betyr at vi må velge  $R_{IC} \ll R_1$ .

Med forenklet symbol tilsvarende Fig. 10, kan koplingen i Fig. 11 tegnes:

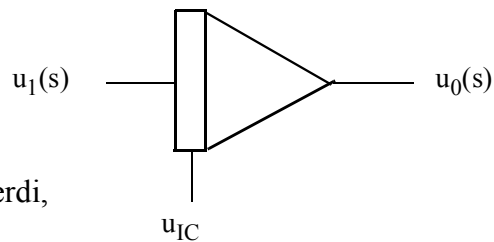


Fig. 12 Integrator med initialverdi, forenklet symbol

Releene inngår ikke i det forenklete symbolet, de forklares eller beskrives separat hvis behov.

## Derivator

En derivator burde vel egentlig ha en transferfunksjon på formen  $sK$  hvor  $K$  er en konstant. Denne ville imidlertid ha amplitude-frekvensdiagram som stiger konstant med  $+1$  mot uendelig. En slik krets er hverken fysisk realiserbar, eller ønskelig ut fra støy-hensyn. Vi må nøye oss med å oppnå en  $+1$ -karakteristikk innen det interessante frekvensområde, m.a. o. en amplitude-frekvenskarakteristikk slik:

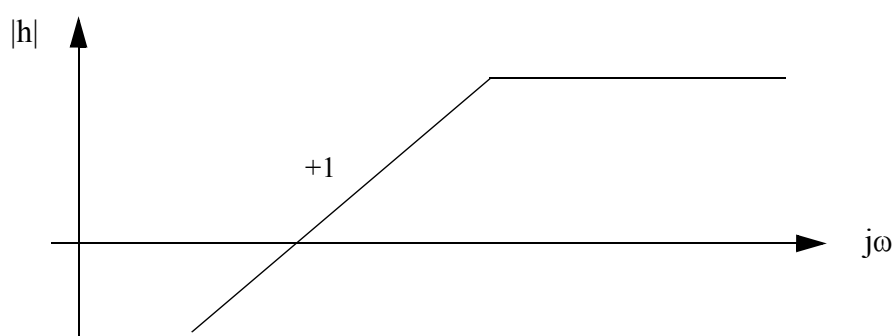


Fig. 13 Amplitude-frekvensdiagram, begrenset derivator

Dette er en “begrenset derivat”, er fullt oppnåelig og vil ha ønsket virkning, hvis knekkfrekvensen ligger tilstrekkelig høyere enn det interessante arbeidsområde. Transferfunksjonen er

$$\frac{T_a s}{1 + T_b s} \quad (14)$$

Denne realiseres lett med koplingen

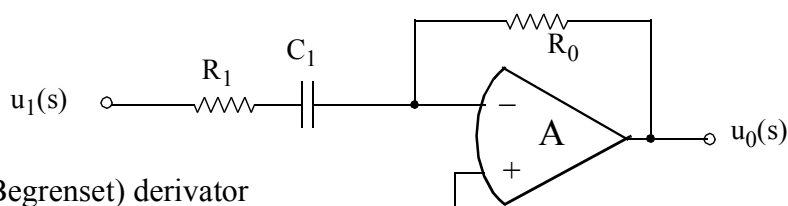


Fig. 14 (Begrenset) derivator

med transferfunksjon

$$-\frac{u_0}{u_1}(s) = \frac{R_0}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} = \frac{sR_0C_1}{1 + sR_1C_1} = \frac{sT_0}{1 + sT_1} \quad (15)$$

---

## Summeforsterker med variabel forsterkning

Denne realiseres enkelt med koplingen

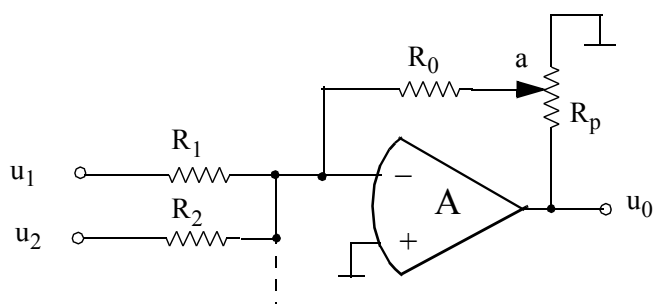


Fig. 15 Tilbakekoplet, summerende operasjonsforsterker

Dette er en ren, statisk forsterkning, hvor forsterkningen innstilles med et potensiometer med koeffisient  $0 < a \leq 1$ . Forsterkningsfaktor blir da:

$$\frac{u_0}{u_1} = - \frac{R_0}{a} \cdot \frac{1}{R_1} \quad (16)$$

Det er viktig at  $a$  ikke gjøres for liten, da blir koplingen uten tilbakekopling, og dette ser vi også av likning (16), hvor  $a$  står i nevneren. Motstanden  $R_p$  i potensiometeret inngår ikke i likningen og er uten betydning men må velges med rimelig størrelse ut fra belastningsmessige hensyn<sup>1</sup>. Hvis man rent praktisk vil gardere seg mot at  $a$  settes for lavt, kan enkelt en liten motstand  $R_{ps}$  innsettes i serie med jord-tillegningen av potensiometeret. Passende kan velges  $R_{ps} = 0,1R_p$ .

---

1. Velges  $R_p$  for lav, belastes opamp'en unødige meget elektrisk, og velges den for høy, blir potensiometerets motstand dominerende i forhold til  $R_0$ . En passende verdi for  $R_p$  kan være  $R_p \approx 0,1 \cdot R_0$ . I alle tilfeller må belastningen som  $R_0$  representerer medtas i effektiv verdi for  $a$ .

### 3. Noen koplinger med aktiv pluss-inngang

#### Ikke-inverterende forsterker

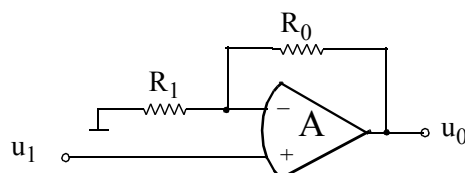


Fig. 16 Ikke-inverterende spenningsforsterker

Forsterkningen er positiv,

$$1 + \frac{R_0}{R_1} \quad (17)$$

og inngangsimpedansen er meget høy.

Hvis forsterkning = 1 er akseptabelt, kan koplingen forenkles ytterligere, som også vist hos Hambley i fig. 14.12:

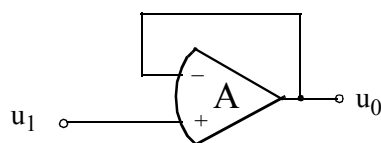


Fig. 17 Spenningsfølger (ikke-inverterende)

#### Differensialforsterker

Differensialforsterker, her valgt med generelle impedanser, som gjerne kan erstattes med ohmske motstander hvis det kun er frekvensuavhengig (konstant) forsterkning som ønskes:

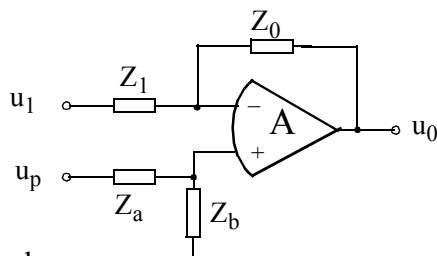


Fig. 18 Differensial- spenningsforsterker

---

Utgangsspenningen som funksjon av de to inngangsspenningene  $u_1$  og  $u_p$  blir:

$$u_0(s) = -Z_0 \cdot \left( \frac{u_1(s)}{Z_1} - \frac{u_p(s)}{Z_p} \cdot \frac{Z_b}{Z_a + Z_b} \right) \quad (18)$$

hvor  $Z_p$  er parallellkvivalenten av  $Z_0$  og  $Z_1$ :

$$Z_p = \frac{Z_0 Z_1}{Z_0 + Z_1} \quad (19)$$

Vanligvis ønsker vi samme forsterkning (absoluttverdi) fra de to inngangene, dvs. at utgangssignalet skal være proporsjonalt med differensen mellom inngangsklemmene:  $u_0 \sim -(u_1 - u_p)$ . Fra likning (18) ser vi at dette vil innebære

$$Z_1 = \frac{Z_p(Z_a + Z_b)}{Z_b} = \frac{Z_0 Z_1}{Z_0 + Z_1} \cdot \frac{(Z_a + Z_b)}{Z_b} \quad (20)$$

som forenklet gir en binding mellom impedansparene i de to grenene:

$$\frac{Z_b}{Z_a} = \frac{Z_0}{Z_1} \quad (21)$$

Da blir likning (18) redusert til

$$u_0(s) = -\frac{Z_0}{Z_1}(u_1 - u_p)(s) \quad (22)$$

## 4. Filtere

Enkle, førsteordens filtere kan for så vidt lages enkelt v.h.j.a. kun passive ohmske motstander og kondensatorer (RC), vi trenger ikke bruke operasjonsforsterkere til det. Det er imidlertid mye enklere å oppnå belastningsuavhengighet og andre fordeler hvis vi bruker opamp.

Hvis vi trenger filter med steilere flanker, må vi bruke høyere orden i transferfunksjonen, og steilheten av flankene, dvs. "skarpheten" av filteret, øker med økende orden. Et passivt 2.-ordens filter kan realiseres ved hjelp av en kombinasjon av induktans, kapasitans og resistans, gjerne forkortet en LCR-krets. Bruk av spoler er imidlertid upraktisk, så en aktiv kretsløsning med operasjonsforsterker er å foretrekke, fordi en 2.-ordens transferfunksjon da kan realiseres med kun RC som passive komponenter. En annen stor fordel ved en operasjonsforsterkerløsning er at vi kan enkelt kaskadekople flere opamp'er og oppnå total transferfunksjon uttrykt som produktet av transferfunksjonene for de enkelte trinn:

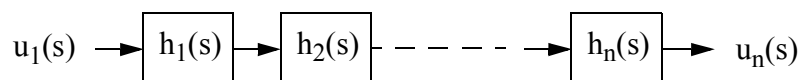


Fig. 19 Kaskadekoblede enkle transferfunksjoner

$$\frac{u_n(s)}{u_1(s)} = h(s) = h_1(s) \cdot h_2(s) \cdot \dots \cdot h_n(s) \quad (23)$$

En transferfunksjon som kan uttrykkes som et produkt av en rekke elementære transferfunksjoner kan enkelt realiseres som en kaskadekople av kretser som hver realiserer en enkelt elementær transferfunksjon. En viktig forutsetning for at dette lar seg gjøre enkelt er imidlertid at de enkelte transferfunksjonene ikke innvirker på hverandre. Dette er tilfelle med kaskader av operasjonsforsterkerkoplinger. Derimot gjelder dette *ikke* ved sammenkople av en rekke passive komponentgrupper.

### Noen enkle første-ordens filtere

Førsteordens filtere lager vi enkelt, med utgangspunkt i deres transferfunksjon eller amplitude-frekvenskarakteristikk:



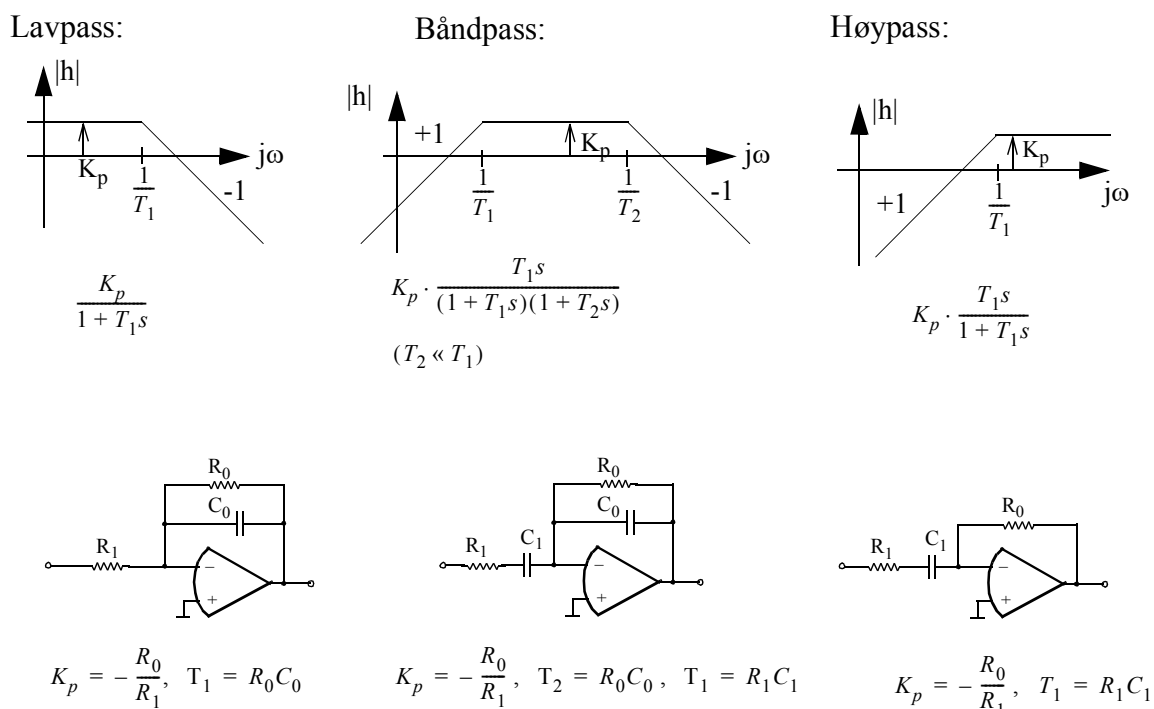


Fig. 20 Tre førsteordens filtere

## Høyere ordens filtere

Det faller langt utenfor rammen for dette notat å gi en omfattende behandling av høyere ordens filtere. Her skal bare omtales én type, *Sallen-Key* krets som også er behandlet i læreboken<sup>1</sup>. Dette er et eksempel på den bredere klassen *Butterworth filter*, som er av orden  $2n$ , dvs. 2., 4., osv., og som kan realiseres med en kaskade av 2. ordens elementer hvor hvert er realisert med en opamp. Ett ledd av et slikt filter kan realiseres som vist i Fig. 21 (lærebo-kens fig. 11.40). Det er et lavpassfilter, og ved enkelt å betrakte figuren (Fig. 21) ser vi at forsterkningen for lave frekvenser blir  $K$  (se likning (17) på side 12).

1. Allan R. Hambley: Electrical Engineering (2. ed. 2002), s. 646

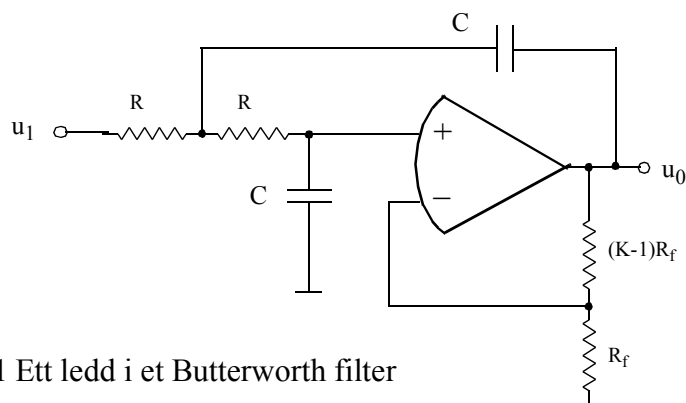


Fig. 21 Ett ledd i et Butterworth filter

Det kan lett vises at transferfunksjonen for kretsen i Fig. 21 blir:

$$\frac{u_0}{u_1}(s) = \frac{K}{1 + (3 - K)Ts + (Ts)^2} \quad (24)$$

hvor  $T=RC$ .

Dette er stabilt for  $K < 3$ . For  $K > 1$  har transferfunksjonen komplekst-konjugerte poler som i det komplekse plan ligger på en sirkel med sentrum i origo og med radius=1:

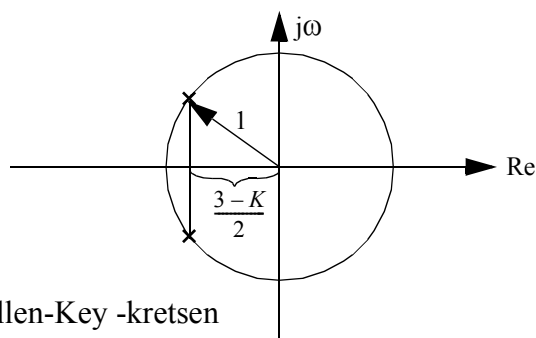


Fig. 22 Polene for Sallen-Key -kretsen

Når  $K$  økes fra  $K=1$  mot 3, beveger polene seg utover langs enhetssirkelen og når den imaginære akse ved  $K=3$ . Økes  $K$  videre, går polene over i høyre halvplan, og kretsen blir ustabil og oscillerer. Ved å velge  $K$  i området 1-3, kan filteret gis passende steilhet.