

HOVEDOPPGAVE

STABILITETSANALYSE AV PARALLELL KRAFT/POSISJONSSTYRING FOR MANIPULATORER

Jan Tommy Gravdahl



Universitetet i Trondheim
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
Institutt for teknisk kybernetikk

TRONDHEIM
Januar 1994

Eiendomsrett

Denne hovedoppgaven er Norges Tekniske Høgskoles eiendom og kan av Høgskolen benyttes til undervisning og forskningsformål. Arbeidet kan ikke utnyttes til andre formål, for eksempel økonomiske, uten etter avtale mellom de interesserte parter.

Erklæring

Jeg erklærer herved at hovedoppgaven er utført selvstendig og i samsvar med eksamensreglementet ved Norges Tekniske Høgskole.

Trondheim 14. januar 1993

Jan Tommy Gravdahl

Forord

Denne hovedoppgaven ble gitt ved Institutt for Teknisk Kybernetikk, NTH, høsten 1993, og faglærer under arbeidet har vært Professor Olav Egeland.

Arbeidet med oppgaven har vært interessant og har gitt meg innblikk i kraftstyring og stabilitetsanalyse av ulineære systemer. Jeg har også lært en god del ny matematikk.

Til slutt vil jeg takke Olav Egeland for veiledning og gutta på rom B-109 for godt arbeidsmiljø.

Trondheim 14. januar 1993

Jan Tommy Gravdahl

Sammen drag

Denne hovedoppgaven tar for seg kraftstyring av robotmanipulatorer. Dette er et problem det har blitt gitt mange løsninger på, og en av de siste er presentert i [Chiaverini og Siciliano 1991] og er kalt “Parallell kraft/posisjonsstyring”

Denne kraftstyringsmetoden er utviklet for å styre posisjon og kontaktkraft for en manipulator med tre frihetsgrader. Det var ønskelig å utvide denne metoden til også å kunne bli brukt på manipulatorer med seks frihetsgrader, slik at også orientering og kontaktmoment kan tas hensyn til og reguleres.

I denne hovedoppgaven presenterer vi matematiske hjelpemidler som gjør en slik utvidelse mulig. Reguleringen foretas i robotens oppgaverom og i den forbindelse anvendes skruer for å beskrive hastigheter, forflytninger og krefter. Robotens kinematikk beskrives på den spesielle euklidske gruppe, $SE(3)$, og robotgriperens orientering parametriseres med Eulerparametre. Regulatoren er av PID-type med PD-virkning på posisjon og PI-virkning på kraft.

Robotens dynamiske ligninger, modell av kontaktkreftene, regulator og robotkinematikken kobles så sammen til en kompakt modell etter samme mønster som modellen i tre frihetsgrader.

Til slutt foreslås en Lyapunovfunksjonskandidat for å analysere stabiliteten til systemet. Vi viser at denne Lyapunovfunksjonskandidaten er en Lyapunovfunksjon for kraftstyringssystemet og ved hjelp av LaSalles teorem beviser vi at systemet er asymptotisk stabilt.

Innhold

Forord	i
Sammendrag	ii
1 Innledning	1
1.1 Bakgrunn	1
1.2 Relatert arbeid	2
1.3 Organisering av hovedoppgaven	2
2 Teoretisk grunnlag	4
2.1 Den spesielle Euklidske gruppe, $SE(3)$	4
2.1.1 Definisjon av $SE(3)$	4
2.1.2 Tangentrommet $se(3)$	10
2.1.3 Det duale tangentrommet $se^*(3)$	12
2.1.4 Skruer	13
2.2 Eulerparametre	15
2.2.1 Parametrisering av $SO(3)$	15
2.2.2 Sammensatte rotasjoner	16
2.2.3 Kinematiske differensialligninger for eulerparametre	16
2.3 Kontaktkrefter	18
2.3.1 Stivhetsmatriser	18
2.3.2 Spesifisering av kontaktkonfigurasjon	20
2.3.3 Stivhetsmetrikk og invarians	22
2.3.4 Dekomponering av hastighet	24

2.4	Dynamisk modell for robotmanipulator	27
2.5	Oppgavekoordinater	29
2.6	Lyapunovteori	31
2.7	Lyapunovfunksjoner med kryssledd	32
2.8	Regulering og stabilitetsanalyse på $SE(3)$	34
2.8.1	Posisjonsdelen	35
2.8.2	Rotasjonsdelen	36
2.8.3	Konklusjon	37
3	Parallell Kraft/posisjonsstyring i 3 DOF	38
3.1	Dynamisk robotmodell	38
3.2	Modell av kontaktkraft	38
3.3	Parallell regulering i 3 DOF	42
3.3.1	PID-regulator	42
3.3.2	Stasjonære tilstander	42
3.4	Totalmodell for manipulator/regulator	44
4	Stabilitetsanalyse i 3 DOF	47
4.1	Valg av LFK	47
4.2	Beregning og begrensning av V	47
4.3	Beregning og begrensning av \dot{V}	48
4.4	Konklusjon	49
5	Parallell Kraft/posisjonsstyring i 6 DOF	51
5.1	Dynamisk robotmodell	51
5.2	Modell av kontaktkraft	52
5.3	Regulator	53
5.3.1	PID-regulator	53
5.3.2	Stasjonære tilstander	54
5.4	Totalmodell for manipulator/regulator	58

6	Stabilitetsanalyse i 6 DOF	62
6.1	Valg av LFK	62
6.2	Beregning og begrensning av V	63
6.2.1	Beregning og begrensning av V med full vektmatrise	63
6.2.2	Beregning og begrensning av V med diagonal vektmatrise	65
6.3	Beregning av \dot{V}	67
6.4	Begrensning av \dot{V}	69
6.5	Diskusjon og Konklusjon	75
7	Konklusjon	78
A	Beregning av $\ E\$	A.I
B	Matrisen PF	B.I
C	Begrensning av produkter	C.I

Kapittel 1

Innledning

1.1 Bakgrunn

Kraftstyring av robotmanipulatorer omfatter styring av den kraft manipulatoren utøver på sine omgivelser samt styring av robot-griperens posisjon.

Dette problemet er omtalt i en mengde artikler og lærebøker og mange forskjellige løsninger er blitt presentert. En oversikt over forskjellige metoder er presentert i [Whitney 1987].

Et grunnleggende problem med kraftstyring er at det, som regel, ikke er fysisk mulig å kunne styre både kontaktkraft og posisjon til ønsket verdi samtidig. En av de mest utbredte metodene, hybrid kraftstyring, benytter seg av såkalte utvelgelsesmatriser for å styre kraft og posisjon hver for seg. Et problem med dette er at man må ha eksakt kunnskap om geometrien til omgivelsene for å kunne spesifisere utvelgelsesmatrisene. Dette vanskeliggjør styring i tilfeller der roboten støter inn i uforutsette hindringer.

En konseptuell ny metode for kraftstyring kalt parallell kraft/posisjonsstyring ble presentert i [Chiaverini og Siciliano 1991] og [Chiaverini, Siciliano og Villani 1992]. Her brukes ingen utvelgelsesmatriser og kraft og posisjonspådrag adderes i regulatoren slik at vi får en parallell struktur. Denne regulatorstrukturen er også benyttet til overflatefølging i [Chiaverini og Sciavicco 1992] og i [Siciliano og Villani 1992] er en adaptiv versjon er presentert og analysert.

Felles for modelleringen i [Chiaverini og Siciliano 1991], [Chiaverini, Siciliano og Villani 1992], [Chiaverini og Sciavicco 1992] og [Siciliano og Villani 1992] er at manipulatoren som reguleres og analyseres har tre frihetsgrader og det er posisjon og kontaktkraft som styres.

I denne hovedoppgaven skal vi utvikle og bevise stabilitet av en parallell regulatorstruktur for å styre robotgriperens posisjon/orientering og kontaktkraft/moment for en robotmanipulator med seks frihetsgrader.

I denne forbindelse beskrives griperens hastighet med en *hastighetskrue* (eng.:twist) og kontaktkraften/momentet med en *kraftskru* (eng.:wrench), mens kinematikken beskrives

på den spesielle euklidske gruppe, $SE(3)$ og orienteringen parametriseres med Eulerparametre.

Et stort problem med hybrid-regulering har vært den feilaktige bruken av ortogonalitet i forbindelse med twister og wrencher [Duffy 1990]. Vi vil i denne hovedoppgaven bygge opp et matematisk grunnlag for modelleringen av systemet bestående av manipulator, kontaktwrench, konfigurasjon i $SE(3)$ og parallell regulator, og vi vil bruke begrepet \mathcal{K} -ortogonalitet som definert i [DeShutter og Bruyninckx 1992] for å unngå feilene beskrevet i [Duffy 1990].

1.2 Relatert arbeid

Under arbeidet med hovedoppgaven skrev undertegnede og professor Olav Egeland i samarbeid med Stefano Chiaverini og Bruno Siciliano en artikkel, [Gravdahl, Egeland, Chiaverini og Siciliano], som er innsendt til Symposium on Robot Control, (SY.RO.CO.'94), Capri i Italia, 19.–21. september 1994. Artikkelen har tittelen “Stability analysis in 6 DOF of force/position control of robot manipulators”.

1.3 Organisering av hovedoppgaven

Hovedoppgaven er organisert på følgende måte:

- **Kapittel 2**

Her presenteres og defineres en mengde matematiske begreper som skal brukes i modelleringen av kraftstyringssystemet og den påfølgende stabilitetsanalysen. Noen sentrale emner er $SE(3)$, tangentrommene $se(3)$ og $se^*(3)$, skruer, Eulerparametere, kontaktkrefter, Lyapunovstabilitet og Lyapunovfunksjoner med kryssledd.

- **Kapittel 3**

Den parallelle kraft/posisjonsregulatoren fra [Chiaverini og Siciliano 1991] presenteres.

- **Kapittel 4**

Lyapunovs metode brukes for å analysere stabiliteten til den parallelle kraft/posisjonsstyringsregulatoren fra kapittel 3.

- **Kapittel 5**

Ved bruk av teorien fra kapittel 2 utvides systemet i kapittel 3 til et kraftstyringssystem som også omfatter styring av orientering og kontaktmoment.

- **Kapittel 6**

Det foreslås en Lyapunovfunksjonskandidat for stabilitetsanalyse av kraftstyringen fra kapittel 5 og asymptotisk stabilitet påvises.

- **Kapittel 7**

Konklusjon

- **Appendix A,B og C**

Her finnes en del utregninger som brukes under stabilitetsanalysen i kapittel 6

Kapittel 2

Teoretisk grunnlag

2.1 Den spesielle Euklidske gruppe, $SE(3)$

2.1.1 Definisjon av $SE(3)$

Vi vil først definere begrepet rotasjonsmatrise som gjort i [Egeland 1993]. Et koordinatsystem I kan beskrives med tre ortogonale enhetsvektorer \vec{i}_I , \vec{j}_I og \vec{k}_I langs x-, y- og z-aksen til I . Disse vektorene er beskrevet koordinatfritt, det vil si basisuavhengig, ved retning og lengde.

På samme måte beskrives et koordinatsystem B med de ortogonale enhetsvektorene \vec{i}_B , \vec{j}_B og \vec{k}_B .

En vektor \vec{v} kan nå beskrives som en lineær kombinasjon av \vec{i}_I , \vec{j}_I og \vec{k}_I i system I :

$$\vec{v} = v_{Ii}\vec{i}_I + v_{Ij}\vec{j}_I + v_{Ik}\vec{k}_I \quad (2.1)$$

der

$$v_{Ii} = \vec{v} \cdot \vec{i}_I, v_{Ij} = \vec{v} \cdot \vec{j}_I, v_{Ik} = \vec{v} \cdot \vec{k}_I \quad (2.2)$$

Tilsvarende har vi i system B :

$$\vec{v} = v_{Bi}\vec{i}_B + v_{Bj}\vec{j}_B + v_{Bk}\vec{k}_B \quad (2.3)$$

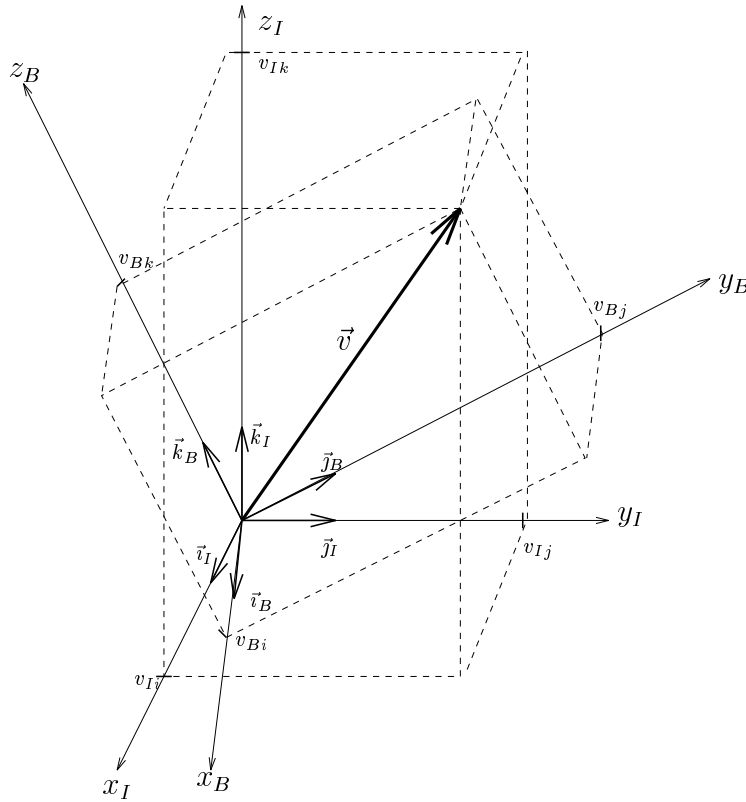
der

$$v_{Bi} = \vec{v} \cdot \vec{i}_B, v_{Bj} = \vec{v} \cdot \vec{j}_B, v_{Bk} = \vec{v} \cdot \vec{k}_B \quad (2.4)$$

v_{Ii} , v_{Ij} og v_{Ik} kalles \vec{v} 's koordinater i system I og v_{Bi} , v_{Bj} og v_{Bk} kalles \vec{v} 's koordinater i system B .

Vektoren \vec{v} kan nå beskrives entydig med vektorens koordinater. I system I får vi:

$${}^I\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{Ii} \\ v_{Ij} \\ v_{Ik} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$


 Figur 2.1: Rotasjon fra I til B

og i system B :

$${}^B \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{Bi} \\ v_{Bj} \\ v_{Bk} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Dette er illustrert i figur 2.1.

Vi vil nå finne en sammenheng mellom ${}^I \mathbf{v}$ og ${}^B \mathbf{v}$. Dette gjøres på følgende måte:

$$v_{Bi} = \vec{v} \cdot \vec{i}_I = (v_{Bj} \vec{j}_B + v_{Bk} \vec{k}_B) \cdot \vec{i}_I \quad (2.7)$$

$$v_{Bi} = v_{Bi} \vec{i}_B \cdot \vec{i}_I + v_{Bj} \vec{j}_B \cdot \vec{i}_I + v_{Bk} \vec{k}_B \cdot \vec{i}_I \quad (2.8)$$

Tilsvarende får vi for v_{Ij} og v_{Ik} :

$$v_{Ij} = v_{Bi} \vec{i}_B \cdot \vec{j}_I + v_{Bj} \vec{j}_B \cdot \vec{j}_I + v_{Bk} \vec{k}_B \cdot \vec{j}_I \quad (2.9)$$

$$v_{Ik} = v_{Bi} \vec{i}_B \cdot \vec{k}_I + v_{Bj} \vec{j}_B \cdot \vec{k}_I + v_{Bk} \vec{k}_B \cdot \vec{k}_I \quad (2.10)$$

På matriseform kan vi nå skrive:

$${}^I \mathbf{v} = \mathbf{R}_I^{BB} {}^B \mathbf{v}, \text{ der } \mathbf{R}_I^B = \begin{bmatrix} \vec{i}_B \cdot \vec{i}_I & \vec{j}_B \cdot \vec{i}_I & \vec{k}_B \cdot \vec{i}_I \\ \vec{i}_B \cdot \vec{j}_I & \vec{j}_B \cdot \vec{j}_I & \vec{k}_B \cdot \vec{j}_I \\ \vec{i}_B \cdot \vec{k}_I & \vec{j}_B \cdot \vec{k}_I & \vec{k}_B \cdot \vec{k}_I \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

\mathbf{R}_I^B kalles rotasjonsmatrisen fra I til B . Denne matrisen transformerer en koordinatvektor fra system B til system I og kalles derfor også koordinattransformasjonsmatrisen fra B til I . På samme måte som over kan vi finne:

$$\mathbf{R}_B^I = (\mathbf{R}_I^B)^T \quad (2.12)$$

For alle ${}^B\mathbf{B}$ gjelder:

$${}^B\mathbf{v} = \mathbf{R}_B^I {}^I\mathbf{v} = \mathbf{R}_B^I \mathbf{R}_I^{B^B} \mathbf{v} \quad (2.13)$$

dette gir

$$\mathbf{R}_B^I \mathbf{R}_I^B = \mathbf{I} \iff \mathbf{R}_I^B = (\mathbf{R}_B^I)^{-1} \quad (2.14)$$

Ligningene (2.12) og (2.14) gir nå :

$$(\mathbf{R}_I^B)^{-1} = (\mathbf{R}_B^I)^T \quad (2.15)$$

som betyr at \mathbf{R}_I^B er en ortogonal matrise. Hvis vi definerer koordinatsystemene I og B til å være høyrehåndssystemer kan det vises at [Egeland 1993]:

$$\det \mathbf{R}_I^B = 1 \quad (2.16)$$

Vi definerer nå :

$$SO(3) \triangleq \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \text{ og } \det(\mathbf{R}) = 1\} \quad (2.17)$$

Vi skal vise at $SO(3)$ har strukturen av en gruppe, og trenger derfor definisjonen på en gruppe [Curtis 1979]:

Definisjon 2.1 En gruppe G er en mengde G sammen med en binær avbildning

$$\phi : G \times G \rightarrow G \quad (2.18)$$

Vi skriver $\phi(a, b) = ab \forall a, b \in G$
 ϕ må oppfylle følgende aksiomer:

- ϕ er assosiativ: $(ab)c = a(bc) \forall a, b, c \in G$
- Det eksisterer en identitet: $\exists e \in G \mid ea = ae = a \forall a \in G$
- Det eksisterer en invers: $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G \mid aa^{-1} = a^{-1}a = e$

■

Påstand 2.1 $SO(3)$ er en gruppe. ■

Bevis:

Avbildningen ϕ er definert ved :

$$\phi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \forall \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \in SO(3)$$

Det følger da at:

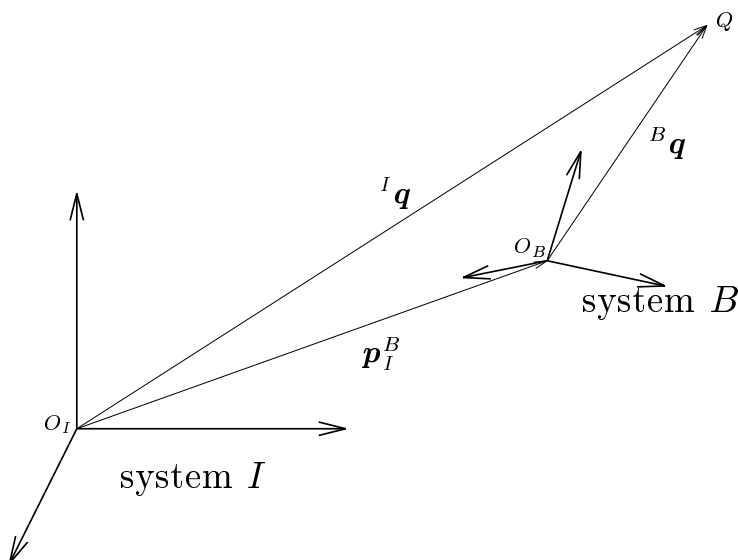
$$\left. \begin{aligned} \phi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)^\top \phi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) &= \mathbf{R}_2^\top \mathbf{R}_1^\top \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 = \mathbf{I} \\ \det(\phi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)) &= \det(\mathbf{R}_1) \det(\mathbf{R}_2) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \phi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \in SO(3)$$

For ϕ gjelder:

- Assosiativitet: $(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2) \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_1 (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3)$. Dette følger av vanlig matrisemultiplikasjon.
- Identitet: $\mathbf{I}_{3 \times 3} \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{I}_{3 \times 3} = \mathbf{R} \forall \mathbf{R} \in SO(3)$ der $\mathbf{I}_{3 \times 3} = \text{diag}(1, 1, 1)$
- Invers: $\mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ der $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\top$ da \mathbf{R} er ortogonal

■

$SO(3)$ kalles den spesielle ortogonale gruppe og er mengden av alle rotasjonsmatriser. Vi skal nå se på det tilfellet at system B er rotert og translert i forhold til utgangspunktet, system I .



Figur 2.2: Transformasjon fra I til B

tet, system I . La ${}^I \mathbf{p}_I^B$ være posisjonen til origo i system B , O_B , i forhold til origo i system I , O_I , gitt i I -koordinater. (Se figur 2.2)

Koordinatene til punktet \mathbf{q} dekomponert i system I blir da:

$${}^I \mathbf{q} = {}^I \mathbf{R}_I^{B B} \mathbf{q} + {}^I \mathbf{p}_I^B \quad (2.19)$$

der ${}^I \mathbf{R}_I^B$ er rotasjonsmatrisen fra I til B uttrykt i system I .

For å uttrykke denne type transformasjoner som en matrisemultiplikasjon innfører vi homogene koordinater:

$${}^I \mathbf{Q} \triangleq \begin{bmatrix} {}^I \mathbf{q} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Vi ser at ligning (2.19) kan skrives

$${}^I\mathbf{Q} = \mathbf{T}_I^{BB} \mathbf{Q} \text{ der } \mathbf{T}_I^B = \begin{bmatrix} {}^I\mathbf{R}_I^B & {}^I\mathbf{p}_I^B \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

\mathbf{T}_I^B kalles en homogen transformasjonsmatrise. Vi definerer:

$$SE(3) \triangleq \{ \mathbf{T} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R} \in SO(3), \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \} \quad (2.22)$$

Påstand 2.2 $SE(3)$ er en gruppe. ■

Bevis:

$$\phi(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \quad \forall \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in SE(3)$$

Vi har at $\phi(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 & \mathbf{p}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$ siden $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \in SO(3)$. Dette betyr

at $\phi(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) \in SE(3)$

For ϕ gjelder:

- Assosiativitet: $(\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2) \mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_1 (\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3)$. Dette følger av vanlig matrisemultiplikasjon.
- Identitet: $\mathbf{I}_{4 \times 4} \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{I}_{4 \times 4} = \mathbf{T} \quad \forall \mathbf{T} \in SE(3)$ der $\mathbf{I}_{4 \times 4} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$
- Invers: $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I}_{4 \times 4}$ der $\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} & -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$ siden $\mathbf{R}^{-1} \in SO(3)$.

■

$SE(3)$ kalles den spesielle Euklidske gruppe av 3. orden.

Vi vil nå innføre begrepet deriverbar (eller glatt) manifold som definert i [Perko 1991].

Vi trenger først begrepet *homeomorfi*:

Definisjon 2.2 La X være et metrisk rom og la U og V være underrom i X . En homeomorfi fra U til V er en kontinuerlig en-til-en avbildning av U på V , $h : U \rightarrow V$ slik at $h^{-1} : V \rightarrow U$ er kontinuerlig.

Rommene U og V sies å være homeomorfe eller topologisk ekvivalente hvis en slik h finnes. ■

Definisjon 2.3 En avbildning h fra U til V sies å være av klasse C^k hvis den har kontinuerlige partiellderiverte på U av alle ordener mindre eller lik k . ■

Definisjon 2.4 En n -dimensjonal deriverbar manifold, M (oså kalt glatt manifold eller manifold av klasse C^k), er et sammenhengende metrisk rom med en åpen dekning $\{U_\alpha\}$. Det vil si:

$$M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \quad (2.23)$$

slik at:

1. For alle α er U_α homeomorf med den åpne enhetskula i \mathbb{R}^n ,

$$B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Det vil si $\forall \alpha \exists \mathbf{h}_\alpha : U_\alpha \rightarrow B$

2. Hvis $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ og $\mathbf{h}_\alpha : U_\alpha \rightarrow B, \mathbf{h}_\beta : U_\beta \rightarrow B$ er homeomorfier så er $\mathbf{h}_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ og $\mathbf{h}_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ underrom av \mathbb{R}^n og avbildningen

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_\alpha \circ \mathbf{h}_\beta^{-1} : \mathbf{h}_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \mathbf{h}_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

er deriverbar (eller av klasse C^k), og for alle $\mathbf{x} \in \mathbf{h}_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ er

$$\det \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \det D\mathbf{h}(\mathbf{x}) \neq 0.$$

■

Det kan vises at $SO(3)$ er en 3-dimensjonal manifold ([Samson 1991] s.22) og at $SE(3)$ er en 6-dimensjonal manifold ([Samson 1991] s.47).

Det kan også vises at $SO(3)$ og $SE(3)$ er reelle Lie-grupper. En Lie-gruppe er definert på følgende måte:[Curtis 1979]

Definisjon 2.5 *En reell Lie-Gruppe, G , er en reell manifold som også er en gruppe der gruppeoperasjonene:*

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\rightarrow G \quad \text{der} \quad \mu : (a, b) \mapsto ab \\ \iota : G &\rightarrow G \quad \text{der} \quad \iota : a \mapsto a^{-1} \end{aligned}$$

er deriverbare (glatte)

■

Påstand 2.3 $SO(3)$ er en reell Lie-gruppe.

■

Bevis:

Siden $SO(3)$ er en gruppe der $\mu(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \mapsto \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$ er kontinuerlig og $\iota(\mathbf{R}) \mapsto \mathbf{R}^{-1}$ er kontinuerlig og $SO(3)$ er en reell manifold, er $SO(3)$ en reell Lie-gruppe. ■

Påstand 2.4 $SE(3)$ er en reell Lie-gruppe.

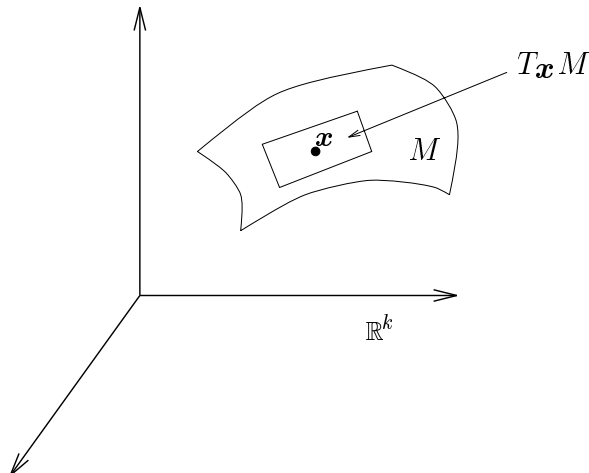
Bevis:

Siden $SE(3)$ er en gruppe der $\mu(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) \mapsto \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2$ er kontinuerlig og $\iota(\mathbf{T}) \mapsto \mathbf{T}^{-1}$ er kontinuerlig og $SE(3)$ er en reell manifold, er $SE(3)$ en reell Lie-gruppe. ■

2.1.2 Tangentrommet $se(3)$

Vi vil først definere hva som menes med tangentrommet til en n -dimensjonal glatt manifold.

Hvis M er en n -dimensjonal glatt manifold i \mathbb{R}^k har vi for hvert punkt $\mathbf{x} \in M$ et n -dimensjonalt tangentrom $T_{\mathbf{x}}M$. Dette er illustrert i figur 2.3. Vektorene i $T_{\mathbf{x}}M$ kalles



Figur 2.3: Tangentrommet til M

tangentvektorene til M i \mathbf{x} . For å finne tangentrommet til $SE(3)$, vil vi først se på tangentrommet til $SO(3)$.

$so(3)$ er tangentrommet til $SO(3)$ i gruppeidentiteten $e \triangleq \mathbf{I}_{3 \times 3}$. Det er vist i [Samson 1991] at $so(3)$ er gitt ved:

$$so(3) = T_e SO(3) = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \mathbf{0}_{3 \times 3}\} \quad (2.24)$$

$so(3)$ kalles også Lie-algebraen til $SO(3)$.

Som vi ser er \mathbf{A} en skjevsymmetrisk matrise.

$$so(3) = \{\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mid \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3\} \quad (2.25)$$

der

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Det er vist i [Egeland 1993] at en rotasjonsmatrise ${}^I \mathbf{R}_I^B \in SO(3)$ oppfyller de kinematiske differensialligningene:

$${}^I \dot{\mathbf{R}}_I^B = \mathbf{S}({}^I \boldsymbol{\omega}_{B/I}) {}^I \mathbf{R}_I^B \quad (2.27)$$

$${}^I \dot{\mathbf{R}}_I^B = {}^I \mathbf{R}_I^B \mathbf{S}({}^B \boldsymbol{\omega}_{B/I}) \quad (2.28)$$

der ${}^I\boldsymbol{\omega}_{B/I}$ og ${}^B\boldsymbol{\omega}_{B/I}$ er vinkelhastigheten til system B i forhold til system I dekomponert i henholdsvis system I og B . Vi sier da at:

$$\dot{\mathbf{R}} \triangleq {}^I\dot{\mathbf{R}}_I^B \implies \dot{\mathbf{R}} \in T_R SO(3) \quad (2.29)$$

og

$$\mathbf{S}({}^I\boldsymbol{\omega}_{B/I}), \mathbf{S}({}^B\boldsymbol{\omega}_{B/I}) \in T_e SO(3) = so(3) \quad (2.30)$$

Vi ser nå på translasjonskomponenten til $SE(3)$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. \mathbf{p} oppfyller ligningen:

$${}^I\dot{\mathbf{p}}_I^B = {}^I\mathbf{R}_I^B {}^B\mathbf{v}_B \quad (2.31)$$

der ${}^I\mathbf{p}_I^B$ er posisjonen til system B i forhold til system I gitt i I 's koordinater og ${}^B\mathbf{v}_B$ er hastigheten til B dekomponert i system B .

Vi har nå for $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^I\mathbf{R}_I^B & {}^I\mathbf{p}_I^B \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$:

$$\dot{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}} & \dot{\mathbf{p}} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{RS}(\boldsymbol{\omega}) & \mathbf{R}\mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Vi sier nå at $\dot{\mathbf{T}} \in T_T SE(3)$, det vil si at $\dot{\mathbf{T}}$ ligger i tangentrommet til $SE(3)$ for konfigurasjonen \mathbf{T} og at:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \in T_e SE(3) = se(3) \quad (2.34)$$

Tangentrommet $se(3)$ er derfor gitt ved:

$$se(3) = \{ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \} \quad (2.35)$$

$se(3)$ kalles også for Lie-algebraen til $SE(3)$.

Dette er en generalisering av hastighetsbegrepet for en glatt kurve i \mathbb{R}^n . Hvis en kurve $\boldsymbol{\phi}(t) \in \mathbb{R}^n$ betegner en posisjon i \mathbb{R}^n , vil kurvens hastighet være gitt ved tangentvektoren $T_t\boldsymbol{\phi}(t)$ ved tidspunktet t .

Hastigheten til en transformasjon $T \in SE(3)$ vil på tilsvarende måte ligge i tangentrommet $se(3)$.

2.1.3 Det duale tangentrommet $se^*(3)$

Vi trenger først begrepet algebraiske former som definert i [Arnold 1989].

Definisjon 2.6 *En algebraisk form av 1. grad (eller en 1-form) er en lineær funksjon*

$$\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.36)$$

Det vil si:

$$\omega(\lambda_1 \boldsymbol{\xi}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\xi}_2) = \lambda_1 \omega(\boldsymbol{\xi}_1) + \lambda_2 \omega(\boldsymbol{\xi}_2) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{R}^n \quad (2.37)$$

■

Mengden av alle 1-former blir et reelt vektorrom hvis vi definerer summen av to 1-former som:

$$(\omega_1 + \omega_2)(\boldsymbol{\xi}) \triangleq \omega_1(\boldsymbol{\xi}) + \omega_2(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.38)$$

og skalar multiplikasjon som

$$(\lambda\omega)(\boldsymbol{\xi}) \triangleq \lambda\omega(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.39)$$

Definisjon 2.7 *Rommet av 1-former på \mathbb{R}^n er n -dimensjonalt og kalles det duale rommet $(\mathbb{R}^n)^*$*

■

Vi vil nå definere det duale tangentrommet til en manifold.

Definisjon 2.8 *La M være en n -dimensjonal manifold av klasse C^k , og la $T_x M$ være tangentrommet til M i \mathbf{x} . En 1-form på $T_x M$ er da definert som en lineær funksjon*

$$\Omega : T_x M \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.40)$$

det vil si:

$$\Omega(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) = \lambda_1 \Omega(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 \Omega(\mathbf{x}_2) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in T_x M \quad (2.41)$$

■

Mengden av alle 1-former på $T_x M$ blir et reelt vektorrom hvis vi definerer $(\Omega_1 + \Omega_2)$ og $(\lambda\Omega)$ som i (2.38) og (2.39).

Definisjon 2.9 *Rommet av 1-former på $T_x M$ er n -dimensjonalt og kalles det duale tangentrommet $T_x^* M$. Dette rommet kalles også cotangentrommet til M i \mathbf{x} og inneholder cotangentvektorene til M i \mathbf{x} .*

■

Siden $SE(3)$ er en 6-dimensjonal manifold kan vi definere:

Definisjon 2.10 Rommet av 1-former på $T_x SE(3)$ er 6-dimensjonalt og kalles det duale tangentrommet $T_x^* SE(3)$ ■

Definisjon 2.11 I identiteten definerer vi

$$se^*(3) \triangleq T_e^* SE(3) \text{ der } e = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (2.42)$$

$se^*(3)$ er det duale tangentrommet til $SE(3)$ i identiteten. $se^*(3)$ kalles også den duale Lie-algebraen til $SE(3)$ ■

2.1.4 Skruer

En skrue er en generalisering av en linje. Skruen beskriver en linje i et 3-dimensjonalt vektorrom U og en vektor som er parallell til denne linja. Denne definisjonen er hentet fra [DeShutter og Bruyninckx 1992].

Når origo i U er bestemt kan en skrue representeres som et ordnet par av to tredimensjonale vektorer. Vi skriver dette:

$$s \triangleq (\vec{l}, \vec{f}) \quad (2.43)$$

Der \vec{l} er en linjevektor som angir retningen til en linje i U , kalt skrueraksen, og \vec{f} er en fri vektor. Den er summen av:

1. Momentet $\vec{r} \times \vec{l}$ av skrueraksen om origo. \vec{r} er et tilfeldig punkt på skrueraksen.
2. En vektor som er paralell til skrueraksen.

Vi skal bruke skruer til å beskrive generaliserte hastigheter og krefter. Vi bruker da følgende definisjoner.

Definisjon 2.12 En hastighetsskrue, eller twist, er en skrue der vinkelhastigheten, $\vec{\omega}$ er linjevektoren, og translasjonshastigheten, \vec{v} er den frie vektoren. Vi bruker notasjonen:

$$\nu \triangleq (\vec{\omega}, \vec{v}) \quad (2.44)$$

■

Definisjon 2.13 En kraftskrue, eller wrench, er en skrue der translasjonskraften, \vec{f} er linjevektoren, og dreiemomentet, \vec{m} er den frie vektoren. Vi bruker notasjonen:

$$w \triangleq (\vec{f}, \vec{m}) \quad (2.45)$$

■

Hvis ikke bare origo i U er valgt, men også et koordinatsystem I , så kan vi uttrykke en skrue på koordinatform. Hver skrue kan da representeres med seks reelle tall. For twister og wrencher skriver vi da:

$${}^I \boldsymbol{\nu} \triangleq \begin{bmatrix} {}^I \boldsymbol{\omega} \\ {}^I \boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad {}^I \boldsymbol{w} \triangleq \begin{bmatrix} {}^I \boldsymbol{f} \\ {}^I \boldsymbol{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

(ω_x, \dots, v_z) kalles de seks Plückerkoordinatene til twisten ν og tilsvarende kalles (f_x, \dots, m_z) de seks Plückerkoordinatene til wrenchen w .

I det følgende vil vi uttrykke et element $\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}({}^I \boldsymbol{\omega}) & {}^I \boldsymbol{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \in se(3)$ som en twist på koordinatform,

$${}^I \boldsymbol{\nu} \triangleq \begin{bmatrix} {}^I \boldsymbol{\omega} \\ {}^I \boldsymbol{v} \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

og vi sier da:

$${}^I \boldsymbol{\nu} \in se(3). \quad (2.48)$$

Tilsvarende uttrykker vi et element $\Gamma \in se^*(3)$ som en wrench på koordinatform,

$${}^I \boldsymbol{w} \triangleq \begin{bmatrix} {}^I \boldsymbol{f} \\ {}^I \boldsymbol{m} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

og skriver:

$${}^I \boldsymbol{w} \in se^*(3) \quad (2.50)$$

Vi vil senere, i forbindelse med fjæring få bruk for små forflytningsskruer i $se(3)$. Notasjonen som da brukes er:

$$x_\Delta = (\vec{\delta}, \vec{d}) \quad (2.51)$$

der $\vec{\delta}$ representerer en liten rotasjon og \vec{d} en liten translasjon. På koordinatform skriver vi:

$${}^I \boldsymbol{x}_\Delta = \begin{bmatrix} {}^I \boldsymbol{\delta} \\ {}^I \boldsymbol{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} \in se(3) \quad (2.52)$$

der (δ_x, \dots, d_z) er de seks Plückerkoordinatene til twisten x_Δ .

2.2 Eulerparametre

2.2.1 Parametrisering av $SO(3)$

En rotasjonsmatrise $\mathbf{R}_I^B \in SO(3)$ kan alltid parametriseres ved en rotasjon gitt ved en vinkel θ om en enhetsvektor \vec{k} [Spong og Vidyasagar 1989]. Vi skriver da:

$$\mathbf{R}_I^B = \mathbf{R}_{k,\theta} \quad (2.53)$$

der $\mathbf{k} \triangleq {}^I \vec{k}$ er \vec{k} dekomponert i system I . $\mathbf{R}_{k,\theta}$ kan da uttrykkes ved \mathbf{k} og θ som:

$$\mathbf{R}_{k,\theta} \triangleq \cos \theta \mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathbf{S}(\mathbf{k}) \sin \theta + \mathbf{k} \mathbf{k}^T (1 - \cos \theta) \quad (2.54)$$

Definisjon 2.14 For en rotasjonsmatrise beskrevet ved en vinkel θ og en enhetsvektor \mathbf{k} er eulerparametrene definert ved

$$\begin{aligned} \eta &= \cos \frac{\theta}{2} \in \mathbb{R} \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \mathbf{k} \sin \frac{\theta}{2} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (2.55)$$

■

Påstand 2.5

$$\eta^2 + \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon} = 1 \quad (2.56)$$

■

Bevis:

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} + \mathbf{k}^T \mathbf{k} \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1$$

da $\mathbf{k}^T \mathbf{k} = 1$

■

Påstand 2.6 $\mathbf{R}_{k,\theta}$ kan uttrykkes ved η og $\boldsymbol{\epsilon}$ på følgende måte:

$$\mathbf{R}_{k,\theta} = \mathbf{R}_{\eta,\boldsymbol{\epsilon}} = (2\eta^2 - 1) \mathbf{I}_{3 \times 3} + 2\boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}^T + 2\eta \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (2.57)$$

■

Bevis:

Vi får bruk for sammenhengene:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos \theta &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Vi setter inn (2.58) i (2.54) og får:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{k,\theta} &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{I}_{3 \times 3} + 2\mathbf{S}(\mathbf{k}) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{k}\mathbf{k}^T (2 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \\
 &= 2\eta^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{I}_{3 \times 3} + 2\eta \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}) + 2\mathbf{k}\mathbf{k}^T \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
 \mathbf{R}_{\eta,\boldsymbol{\epsilon}} &= (2\eta^2 - 1) \mathbf{I}_{3 \times 3} + 2\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^T + 2\eta \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon})
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

■

Av ligning (2.59) ser vi at:

$$\mathbf{R}_{\eta,\boldsymbol{\epsilon}}^T = \mathbf{R}_{\eta,-\boldsymbol{\epsilon}} \tag{2.60}$$

Eulerparametrene er en global og singulærhetsfri parametrisering av en rotasjonsmatrise $\mathbf{R} \in SO(3)$.

2.2.2 Sammensatte rotasjoner

Vi skal nå finne uttrykk for eulerparametrene $(\eta, \boldsymbol{\epsilon})$ til en sammensatt rotasjon

$$\mathbf{R}_{\eta,\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{R}_{\eta_1,\boldsymbol{\epsilon}_1} \mathbf{R}_{\eta_2,\boldsymbol{\epsilon}_2} \in SO(3)$$

uttrykt ved $(\eta_1, \boldsymbol{\epsilon}_1)$ og $(\eta_2, \boldsymbol{\epsilon}_2)$.

Påstand 2.7

$$\begin{aligned}
 \eta &= \eta_1 \eta_2 - \boldsymbol{\epsilon}_1^T \boldsymbol{\epsilon}_2 \\
 \boldsymbol{\epsilon} &= \eta_1 \boldsymbol{\epsilon}_2 + \eta_2 \boldsymbol{\epsilon}_1 + \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_1) \boldsymbol{\epsilon}_2
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

■

Bevis:

Dette kan bevises ved bruk av kvaternionproduktet, se [Egeland 1993]

■

2.2.3 Kinematiske differensialligninger for eulerparametre

Det er vist i [Egeland 1993] at rotasjonsmatrisen $\mathbf{R} \triangleq \mathbf{R}_I^B$ oppfyller de kinematiske differensialligninger:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \mathbf{S}({}^B \boldsymbol{\omega}_{B/I}) \tag{2.62}$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{S}({}^I \boldsymbol{\omega}_{B/I}) \mathbf{R} \tag{2.63}$$

Der ${}^B \boldsymbol{\omega}_{B/I}$ og ${}^I \boldsymbol{\omega}_{B/I}$ er vinkelhastigheten til system B i forhold til system I dekomponert i henholdsvis system B og system I .

Teorem 2.1 Eulerparametrene (η, ϵ) til \mathbf{R} oppfyller de kinematiske differensialligningene:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\text{T}B}\boldsymbol{\omega}_{B/I} \\ \dot{\epsilon} &= \frac{1}{2}(\eta\mathbf{I}_{3\times 3} + \mathbf{S}(\epsilon))^B\boldsymbol{\omega}_{B/I}\end{aligned}\quad (2.64)$$

i system B , og de kinematiske differensialligningene:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\text{T}I}\boldsymbol{\omega}_{B/I} \\ \dot{\epsilon} &= \frac{1}{2}(\eta\mathbf{I}_{3\times 3} - \mathbf{S}(\epsilon))^I\boldsymbol{\omega}_{B/I}\end{aligned}\quad (2.65)$$

i system I

Bevis:

Se [Egeland 1993] ■

Vi vil senere få bruk for de kinematiske differensialligningene for eulerparametrene til en sammensatt rotasjon, og presenterer derfor følgende påstand:

Påstand 2.8 Eulerparametrene $(\hat{\eta}, \hat{\epsilon})$ til den sammensatte rotasjonen gitt ved

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_\infty^{\text{T}}\mathbf{R} \quad (2.66)$$

der $\mathbf{R}_\infty \in SO(3)$ er konstant, oppfyller de kinematiske differensialligningene

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\eta}} &= -\frac{1}{2}\hat{\epsilon}^{\text{T}B}\boldsymbol{\omega}_{B/I} \\ \dot{\hat{\epsilon}} &= \frac{1}{2}(\hat{\eta}\mathbf{I}_{3\times 3} + \mathbf{S}(\hat{\epsilon}))^B\boldsymbol{\omega}_{B/I}\end{aligned}\quad (2.67)$$

i system B , og

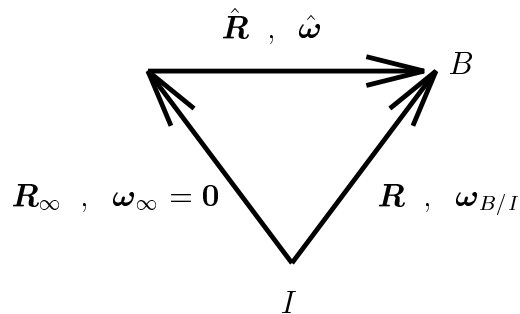
$$\begin{aligned}\dot{\hat{\eta}} &= -\frac{1}{2}\hat{\epsilon}^{\text{T}I}\boldsymbol{\omega}_{B/I} \\ \dot{\hat{\epsilon}} &= \frac{1}{2}(\hat{\eta}\mathbf{I}_{3\times 3} - \mathbf{S}(\hat{\epsilon}))^I\boldsymbol{\omega}_{B/I}\end{aligned}\quad (2.68)$$

i system I . ■

Bevis:

Utfra definisjonen $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_\infty^{\text{T}}\mathbf{R}$ kan vi sette opp diagrammet i figur 2.4 som viser sammenhengen mellom rotasjoner og vinkelhastigheter. Siden \mathbf{R}_∞ er konstant og følgelig $\boldsymbol{\omega}_\infty = \mathbf{0}$ har vi:

$$\boldsymbol{\omega}_{B/I} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \quad (2.69)$$



Figur 2.4: Sammenheng mellom rotasjonsmatriser

som vil gjelde i både system I og B . Vi har da sammenhengene

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\frac{1}{2}\hat{\epsilon}^{TB}\hat{\omega} = -\frac{1}{2}\hat{\epsilon}^{TB}\omega_{B/I} \\ \dot{\epsilon} &= \frac{1}{2}(\hat{\eta}\mathbf{I}_{3\times 3} + \mathbf{S}(\hat{\epsilon}))^B\hat{\omega} = \frac{1}{2}(\hat{\eta}\mathbf{I}_{3\times 3} + \mathbf{S}(\hat{\epsilon}))^B\omega_{B/I}\end{aligned}\quad (2.70)$$

og

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\eta}} &= -\frac{1}{2}\hat{\epsilon}^{TI}\hat{\omega} = -\frac{1}{2}\hat{\epsilon}^{TI}\omega_{B/I} \\ \dot{\hat{\epsilon}} &= \frac{1}{2}(\hat{\eta}\mathbf{I}_{3\times 3} - \mathbf{S}(\hat{\epsilon}))^I\hat{\omega} = \frac{1}{2}(\hat{\eta}\mathbf{I}_{3\times 3} - \mathbf{S}(\hat{\epsilon}))^I\omega_{B/I}\end{aligned}\quad (2.71)$$

og Påstand 2.8 er dermed bevist. ■

2.3 Kontaktkrefter

2.3.1 Stivhetsmatriser

Vi skal her se hvordan vi skal modellere kontaktkrefter ved hjelp av fjærkrefter. Vi antar hele tiden at kontakten skjer på en glatt overflate, \mathcal{S} , og vi ser bort fra effekter av friksjon.

Vi vil få bruk for en definisjon av differensielle former:

Definisjon 2.15 La $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ være en deriverbar 1-form på manifolden M . Differensialet $dg|_x$ av g i \mathbf{x} er da en linær avbildning

$$dg|_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.72)$$

fra tangentrommet til de reelle tall. ■

g vil da være et element i det duale tangentrommet. Det vil si:

$$g|_x \in T_x^*M \quad (2.73)$$

Siden differensialet $dg(\mathbf{x}) : M \rightarrow T_x^*M$ er en avbildning fra M til det duale tangentrommet vi den Hessiske [Lončarić 1987] $d^2g|_x$ være en avbildning fra T_xM til T_x^*M . Det vil si:

$$d^2g|_x : T_xM \rightarrow T_x^*M \quad (2.74)$$

Vi skal nå utvide dette til å gjelde for forflytninger som ligger i tangentrommet $se(3)$.

Definisjon 2.16 *En generalisert fjær er matematisk definert ved en potensialfunksjon V definert på $SE(3)$ [Lončarić 1987]. V er en 1-form på $SE(3)$:*

$$V : SE(3) \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.75)$$

■

Differensialet til V i $e \triangleq \mathbf{I}_{4 \times 4} \in SE(3)$ er den lineære avbildningen:

$$dV|_e : se(3) \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.76)$$

som er et element i $se^*(3)$. Det vil si

$$dV|_e \in se^*(3) \quad (2.77)$$

Kraften¹ som fjæren V påvirker omgivelsene med er gitt av:

$$\Gamma = dV|_e \quad (2.78)$$

Det vil si at fjærkraften ligger i det duale tangentrommet. Γ kan uttrykkes koordinatfritt som en skrue (\vec{f}, \vec{m}) .

Den Hessiske d^2V uttrykker stivheten til fjæra, og er en lineær avbildning fra $se(3)$ til $se^*(3)$ i identiteten:

$$d^2V|_e : se(3) \rightarrow se^*(3) \quad (2.79)$$

Vi definerer nå :

$$\mathbb{K} \triangleq d^2V \quad (2.80)$$

Det bemerkes at \mathbb{K} er en dyade. På koordinatform kan \mathbb{K} representeres med en symmetrisk matrise

$\Delta^I \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ der:

$${}^I \mathbf{K} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

og

$$\Delta \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

¹Dette er en kraft i generalisert betydning. Den har både krefter om momenter som komponenter.

der $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \mathbf{B} = \mathbf{B}^T, \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

\mathbf{K} kalles nå en stivhetsmatrise og Δ kalles resiprokoperatoren. Indeksen I betyr at \mathbf{K} er dekomponert i koordinatsystem I . \mathbf{K} er konstant, men er avhengig av hvilket koordinatsystem den dekomponeres i. For enkelhets skyld vil denne indeksen sløyfes i det følgende.

Elementene $\gamma \in se(3)$ kan uttrykkes koordinatfritt som skruer $(\vec{\delta}, \vec{d})$. Hvis vi uttrykker skruene Γ og γ som koordinatvektorer i \mathbb{R}^6 kan vi sette opp sammenhengen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} = \Delta \mathbf{K} \begin{bmatrix} \delta \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Det finnes et unikt koordinatsystem som gir den enkleste formen på \mathbf{K} . Denne formen kalles normalformen [Lončarić 1987], og gir maksimal dekobling mellom rotasjons- og translasjons-komponentene.

2.3.2 Spesifisering av kontaktkonfigurasjon

Vi skal nå se på hvordan vi skal beskrive kontaktkonfigurasjonen mellom to legemer. Det ene legemet vil være griperen på en robotmanipulator, og det andre legemet en uspesifisert flate i rommet, \mathcal{S} , som roboten er i kontakt med. \mathcal{S} antas å være glatt, fjærende og friksjonsfri. Hastigheten til griperen beskrives med en twist, ν , dekomponert i et koordinatsystem, B , fast i griperen.

Kontaktkreftene beskrives av en wrench, w , dekomponert i det samme koordinatsystemet. Avhengig av kontaktens art, det vil si punkt, linje eller flate, stilles det forskjellige krav til hvordan ν og w tillates å variere.

Vi kaller det vektorromme som ν er i for \mathcal{T} og vektorrommet som w er i for \mathcal{W} . Det er klar at for hver bevegelsesbegrensning vil:[DeShutter og Bruyninckx 1992]

$$\mathcal{T} \subset se(3) \quad (2.84)$$

og

$$\mathcal{W} \subset se^*(3) \quad (2.85)$$

Vi betegner antall frihetsgrader ν har som n_ν , og antall frihetsgrader til w som n_w . Siden de “retninger” som ν har ikke kan variere fritt på grunn av kontakten med \mathcal{S} vil mappes til kontaktwrencher av stivheten \mathbb{K} , har vil $n_w = 6 - n_\nu$. Vi skriver da:

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{T} &= n_\nu \leq 6 \\ \dim \mathcal{W} &= n_w = 6 - n_\nu \end{aligned} \quad (2.86)$$

\mathcal{T} spennes ut av n_ν lineært uavhengige twister og \mathcal{W} spennes ut av n_w lineært uavhengige wrencher:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \text{span}\{\nu_1, \dots, \nu_{n_\nu}\} \\ \mathcal{W} &= \text{span}\{w_1, \dots, w_{n_w}\} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Vi kan derfor dekomponere en twist som: $\sum_{i=1}^{n_\nu} \tau_i \nu_i$ eller på koordinatform i koordinatsystem B :

$${}^B \boldsymbol{\nu} = \sum_{i=1}^{n_\nu} \tau_i {}^B \boldsymbol{\nu}_i \quad (2.88)$$

der ${}^B \boldsymbol{\nu}$ inneholder de 6 Plückerkoordinatene og de n_ν τ_i kalles twistsystemkoordinatene til twisten $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{T}$ med hensyn på den valgte basis av ${}^B \boldsymbol{\nu}_i$ i \mathcal{T} .

På matriseform kan vi skrive dette:

$$\forall {}^B \boldsymbol{\nu} \in \mathcal{T} \exists \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{n_\nu} : {}^B \boldsymbol{\nu} = {}^B \mathbf{J} \boldsymbol{\tau} \quad (2.89)$$

der

$${}^B \mathbf{J} \triangleq [{}^B \boldsymbol{\nu}_1, \dots, {}^B \boldsymbol{\nu}_{n_\nu}]. \quad (2.90)$$

Det vil si

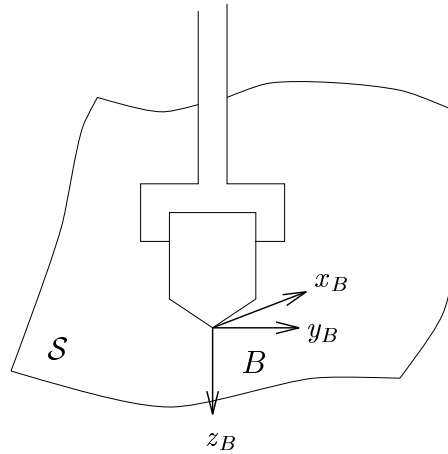
$$\dim {}^B \mathbf{J} = 6 \times n_\nu \quad (2.91)$$

${}^B \mathbf{J}$ kalles twistjacobimatrisen til \mathcal{T} .

På tilsvarende måte kan også en wrenchjacobimatrise, ${}^B \mathbf{G}$ for \mathcal{W} utledes, men det vil ikke bli gjort her. Det bemerkes at utledningen av twistjacobimatrisen like gjerne kunne vært foretatt i koordinatsystem I og hadde da naturlig nok gitt et uttrykk for ${}^I \mathbf{J}$.

Eksempel:

Et eksempel på bruk av twistjacobimatrisen er punktkontakt mellom griperen og \mathcal{S} . Koordinatsystemet B er lagt i kontaktpunktet som vist i figur 2.5. Vi ser at den eneste



Figur 2.5: Eksempel på punktkontakt

retning griperen ikke kan bevege seg fritt i er translasjon i z-retning. Dette betyr at $n_\nu = 5$, og at et mulig uttrykk for ${}^B \mathbf{J}$ er:

$${}^B \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{i} & \mathbf{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

Kontaktkraft vil genereres i z-retning. ■

2.3.3 Stivhetsmetrikk og invarians

Vi ser først på definisjonen av norm og metrikk på et vektorrom V .

Definisjon 2.17 *La V være et vektorrom.*

$$\|\cdot\|^V : V \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.93)$$

er en norm på V hvis:

1. $\|\cdot\|^V$ er positiv definit. Det vil si $\|\mathbf{x}\|^V > 0 \iff \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \forall \mathbf{x} \in V$
2. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^V \leq \|\mathbf{x}\|^V + \|\mathbf{y}\|^V \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ (trekantulikheten)
3. $\|\lambda\mathbf{x}\|^V = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|^V \forall \mathbf{x} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

■

Definisjon 2.18 *En Euklidsk metrikk, g , er en kvadratisk form på V . Det vil si:*

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.94)$$

g har følgende egenskaper:

1. g er av klasse C^2 .
2. g er bilinear: $g(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta g(\mathbf{x}, \mathbf{z})$
3. g er symmetrisk: $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{y}, \mathbf{x})$
4. g er positiv definit: $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ hvis $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, og $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ hvis $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
5. g degenererer ikke. Det vil si: Det eksisterer ikke $\mathbf{y} \neq \mathbf{0} \in V$ slik at $\forall \mathbf{x} \in V : g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$

■

Hvis en Euklidsk metrikk g fins, fins en Euklidsk norm, eller 2-norm på V definert ved:

$$\|\mathbf{x}\|_2^V \triangleq \sqrt{g(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \quad (2.95)$$

Enhver metrikk g har en metrisk tensor, $[g_{ij}]$ som beskriver g 's virkning på en basis $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\}$ i V .

$$g_{ij} \triangleq g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \quad (2.96)$$

Dermed får vi:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j} g_{ij} x_i y_j = \mathbf{x}^T [g_{ij}] \mathbf{y} \quad (2.97)$$

For den Euklidske metrikk på \mathbb{R}^n vil $[g_{ij}] = \mathbf{I}_{n \times n}$.

Hvis V ikke bare er et vektorrom, men også en Lie-gruppe (se kap. 2.1.1), som $SE(3)$, definerer vi begrepet invariant metrikk på følgende måte:

Definisjon 2.19 *Metrikken g er invariant hvis:*

1. $[g_{ij}]$ ikke endres når basisen den er definert på blir transformert av en gruppetransformasjon \mathbf{T}
2. $[g_{ij}]$ ikke endres når lengdeskalaen endres.

■

Følgende viktige toerem er hentet fra [Lončarić 1987]:

Teorem 2.2 *Det eksisterer ingen positiv definitiv invariant metrikk for Lie-gruppen $SE(3)$.*

■

Dette betyr at ingen invariant Euklidsk metrikk eller norm finnes for twister eller wrencher siden Euklidsk metrikk er positiv definitiv. Vi må derfor ha et annet lengdemål på $SE(3)$ enn den Euklidske norm. Vi skal nå se på en slik metrikk, nemlig *stivhetsmetriken*.

Som vi har sett mapper en stivhetsoperator \mathbb{K} en forflytningsskrue x_Δ til en wrench w . Vi definerer nå en kvadratisk form \mathcal{K} slik at:

$$\mathcal{K}(x_\Delta, x'_\Delta) = ({}^I \mathbf{x}'_\Delta)^T {}^I \mathbf{K} {}^I \mathbf{x}_\Delta \quad (2.98)$$

der ${}^I \mathbf{K} = [k_{ij}]$ representerer den metriske tensoren til \mathcal{K} og ${}^I \mathbf{x}'_\Delta, {}^I \mathbf{x}_\Delta \in se(3)$. \mathcal{K} er en metrikk ifølge definisjon 2.18 ([DeShutter og Bruyninckx 1992] s. 53). \mathcal{K} er ikke invariant fordi \mathbf{K} er avhengig av koordinatsystem.

Vi skal nå se på hvordan et begrep som ortogonalitet kan brukes i forbindelse med \mathcal{K} -normen. I \mathbb{R}^n sier vi at to vektorer \mathbf{x} og \mathbf{y} er ortogonale hvis $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$. Mer generelt er det å skrive:

Definisjon 2.20

$$\mathbf{x} \text{ og } \mathbf{y} \text{ er ortogonale hvis } \mathbf{x}^T [g_{ij}] \mathbf{y} = 0 \text{ der } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad (2.99)$$

der $[g_{ij}]$ er den metriske tensoren til den Euklidske metriken som er lik $\mathbf{I}_{n \times n}$ i et n -dimensjonalt ortogonalt koordinatsystem. ■

På samme måte sies to twister ν_1 og ν_2 å være \mathcal{K} -ortogonale hvis

Definisjon 2.21

$$\nu_1 \text{ og } \nu_2 \text{ er } \mathcal{K} \text{ - ortogonale hvis } \mathcal{K}(\nu_1, \nu_2) = \boldsymbol{\nu}_1^T [k_{ij}] \boldsymbol{\nu}_2 = 0 \quad (2.100)$$

der $[k_{ij}]$ er den metriske tensoren til \mathcal{K} . ■

Vi skal se på hvordan \mathcal{K} -normen kan brukes i forbindelse med løsning av lineære ligningssett. Anta at vi har et lineært ligningssett i \mathbb{R}^n :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2.101)$$

Hvis \mathbf{A} ikke er inverterbar, det vil si $\text{rang}\mathbf{A} < n$, vil pseudoinversløsningen [Strang 1988], \mathbf{x}^\dagger være gitt ved:

$$\mathbf{x}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b} \quad (2.102)$$

der \mathbf{A}^\dagger er den pseudoinverse til \mathbf{A} . \mathbf{x}^\dagger er den løsning som er “best” i henhold til 2-normen, det vil si en minste kvadraters løsning. Men hvis ligningssettet er definert i et twistssystem, \mathcal{T} , følger det av teorem 2.2 at vi ikke kan bruke 2-norm. Vi vil derfor bruke \mathcal{K} -normen til dette.

Hvis vi erstatter den Euklidske normen med 2-normen basert på stivhets-metrikken \mathcal{K} får vi den \mathcal{K} -vektede pseudoinversløsningen \mathbf{x}_K^\dagger .

Vi har følgende definisjon på \mathbf{x}_K^\dagger :

Definisjon 2.22 \mathbf{x}_K^\dagger er en 2-norm løsning til $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, med 2-normen basert på stivhets-metrikken \mathcal{K} hvis og bare hvis \mathbf{x}_K^\dagger er en løsning på optimaliseringsproblemet

$$\min_{\mathbf{x}} J = (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})^\top \mathbf{K} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \quad (2.103)$$

■

Vi ser at dette er en utvidelse av optimaliseringskriteriet for pseudoinvers-løsningen. Formelt vil \mathbf{x}_K^\dagger kunne finnes ved hjelp av den \mathcal{K} -vektede pseudoinverse \mathbf{A}_K^\dagger . Hvis \mathbf{A} har full kolonnerang og har flere rader enn kolonner, kan en sluttet løsning for \mathbf{A}_K^\dagger finnes:

$$\mathbf{A}_K^\dagger = (\mathbf{A}^\top \mathbf{K} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{K} \quad (2.104)$$

og \mathbf{x}_K^\dagger finnes ved:

$$\mathbf{x}_K^\dagger = \mathbf{A}_K^\dagger \mathbf{b} \quad (2.105)$$

Metoder for numerisk beregning av \mathbf{x}_K^\dagger og \mathbf{A}_K^\dagger finnes i [Golub og Van Loan 1989].

2.3.4 Dekomponering av hastighet

Vi skal i dette kapitlet se hvordan vi kan dekomponere robotgriperens hastighetsskrue i en fri komponent og en komponent assosiert med kontakten med et annet legeme.

Vi antar at det er et “fjærende element” med stivhet \mathbb{K} mellom griperen og kontaktflaten.

Vi antar at roboten og kraftsensoren er ideelt stive og all fjæring er samlet i \mathbb{K} . Det vil si vi modellerer kontaktkraftskruen som fjærkrefter. I og med at kontaktflaten er antatt fjærende har griperen fortsatt 6 frihetsgrader i hastighet.

Noen av hastighetskomponentene gir opphav til deformering av kontaktflaten. Disse komponentene mappes til en kontaktwrench av \mathbb{K} . Derfor er twisten til griperen alltid en sum av en fri komponent og en komponent assosiert med kontakten. Dette skriver vi:

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}_{fri} + \boldsymbol{\nu}_{comp} \quad (2.106)$$

der indeksen *comp* står for compliance. Disse komponentene ligger i hvert sitt twistsystem og vi skriver:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu}_{fri} &\in \mathcal{T}_{fri} \\ \boldsymbol{\nu}_{comp} &\in \mathcal{T}_{comp} \end{aligned} \quad (2.107)$$

Vi skal nå finne uttrykk for ${}^I\boldsymbol{\nu}_{fri}$ og ${}^I\boldsymbol{\nu}_{comp}$ og til dette trenger vi en projeksjonsoperator.

Definisjon 2.23 *I det Euklidske rommet \mathbb{R}^n vil projeksjonen*

$$\mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{A})} \triangleq \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger \quad (2.108)$$

projisere en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ned på kolonnerommet til \mathbf{A} , $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ [Strang 1988]. Det vil si :

$$\mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{A})}\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}). \quad (2.109)$$

Projeksjonen vil minimalisere feilen i minste kvadraters forstand, det vil si en minimalisering av 2-normen til differansen mellom vektoren og projeksjonen av vektoren. ■

Dette kan ikke brukes i $SE(3)$ da den Euklidske normen ikke eksisterer her. Istedet brukes 2-normen basert på \mathcal{K} -metrikken.

Definisjon 2.24 *I twist-systemet \mathcal{T} vil prosjeksjonen*

$$\mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{A})} = \mathbf{A}\mathbf{A}_K^\dagger \quad (2.110)$$

projisere en twist $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{T}$ \mathcal{K} -ortogonalt ned på kolonnerommet til \mathbf{A} . Projeksjonen vil minimalisere 2-normen basert på \mathcal{K} -metrikken av differansen mellom twisten og projeksjonen av twisten. ■

Anta at $\mathbf{J} = [\boldsymbol{\nu}_1, \dots, \boldsymbol{\nu}_{n_\nu}]$ er twistjacobimatrisen til twistsystemet \mathcal{T} . Altså er:

$$\mathcal{T} = \text{span} \{ \boldsymbol{\nu}_1, \dots, \boldsymbol{\nu}_{n_\nu} \} \quad (2.111)$$

Anta også at \mathcal{T} er inneholdt i twistsystemet \mathcal{T}' . Det vil si

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{T}' \quad (2.112)$$

Definisjon 2.25 *I twistsystemet \mathcal{T}' vil projektsonen*

$$\mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{J})} = \mathbf{J}\mathbf{J}_K^\dagger, \quad (2.113)$$

der \mathbf{J} er twistjacobimatrisen som definert i ligning (2.90), projisere en twist $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{T}'$ \mathcal{K} -ortogonalt ned på kolonnerommet til \mathbf{J} . Ifølge (2.111) er:

$$\mathcal{R}(\mathbf{J}) = \text{span}\{\boldsymbol{\nu}_1, \dots, \boldsymbol{\nu}_{n_\nu}\} = \mathcal{T}$$

Vi definerer derfor

$$\mathbf{P}_T \triangleq \mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{J})} = \mathbf{J}\mathbf{J}_K^\dagger \quad (2.114)$$

\mathbf{P}_T vil projisere en twist $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{T}'$ \mathcal{K} -ortogonalt ned på \mathcal{T} ■

En geometrisk tolkning av dette vil være: $\mathbf{P}_T\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{T}$ er den twisten som er nærmest den målte twisten $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{T}'$ ifølge \mathcal{K} -normen. [DeShutter og Bruyninckx 1992]

\mathbf{P}_T er en type kinestatisk filter og kalles et twist-filter [Doty, Melchiorri og Bonivento 1993].

$\mathcal{R}\{\mathbf{P}_T\}$ definerer mulige retninger griperen kan ha hastighet uten å deformere kontaktflaten, \mathcal{S} . Vi får derfor følgende uttrykk for $\boldsymbol{\nu}_{fri}$ (twist of freedom):

$$\boldsymbol{\nu}_{fri} \triangleq \mathbf{P}_T\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{R}\{\mathbf{P}_T\} \quad (2.115)$$

Det følger da at twist-filteret $(\mathbf{I}_{6 \times 6} - \mathbf{P}_T)$ bestemmer de twistene som deformerer \mathcal{S} , og vi får følgende uttrykk for $\boldsymbol{\nu}_{comp}$ (twist of compliance):

$$\boldsymbol{\nu}_{comp} = (\mathbf{I}_{6 \times 6} - \mathbf{P}_T)\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{R}\{\mathbf{P}_T\}^\perp \quad (2.116)$$

Ifølge [Doty, Melchiorri og Bonivento 1993] har vi at $\mathcal{R}\{\mathbf{P}_T\} = \mathcal{R}\{\mathbf{J}\mathbf{J}_K^\dagger\} = \mathcal{R}\{\mathbf{J}\}$ hvilket vil si at $\boldsymbol{\nu}_{fri}$ avhenger bare av \mathbf{J} og er invariant i forhold til stivhetsmatrisen \mathbf{K} . Vi har også at $\mathcal{R}\{\mathbf{P}_T\}^\perp = \mathcal{R}\{\mathbf{J}\mathbf{J}_K^\dagger\}^\perp = \mathcal{R}\{\mathbf{J}_K^\dagger\}^\perp$ som betyr at $\boldsymbol{\nu}_{comp}$ avhenger av stivhetsmatrisen \mathbf{K} .

Påstand 2.9 \mathcal{T}_{fri} og \mathcal{T}_{comp} er \mathcal{K} -ortogonale rom ■

Bevis:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\boldsymbol{\nu}_{fri}, \boldsymbol{\nu}_{comp}) &= \boldsymbol{\nu}_{fri}^\top \mathbf{K} \boldsymbol{\nu}_{comp} \\ &= \boldsymbol{\nu}^\top \mathbf{P}_T^\top \mathbf{K} (\mathbf{I}_{6 \times 6} - \mathbf{P}_T) \boldsymbol{\nu} \\ &= \boldsymbol{\nu}^\top (\mathbf{P}_T^\top \mathbf{K} - \mathbf{P}_T^\top \mathbf{K} \mathbf{P}_T) \boldsymbol{\nu} \end{aligned}$$

Setter inn ligning (2.114):

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{\nu}_{fri}, \boldsymbol{\nu}_{comp}) = \boldsymbol{\nu}^\top \left\{ (\mathbf{J}_K^\dagger)^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{K} - (\mathbf{J}_K^\dagger)^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{K} \mathbf{J} \mathbf{J}_K^\dagger \right\} \boldsymbol{\nu}$$

Vi setter inn sammenhengene:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_K^\dagger &= (\mathbf{J}^\top \mathbf{K} \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^\top \mathbf{K} \\ (\mathbf{J}_K^\dagger)^\top &= \mathbf{K} \mathbf{J} (\mathbf{J}^\top \mathbf{K} \mathbf{J})^{-1} \text{ da } \mathbf{J}^\top \mathbf{K} \mathbf{J} \text{ er symmetrisk} \end{aligned}$$

og får:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\nu_{fri}, \nu_{comp}) &= \nu^\top \left\{ \mathbf{K} \mathbf{J} (\mathbf{J}^\top \mathbf{K} \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^\top \mathbf{K} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{K} \mathbf{J} (\mathbf{J}^\top \mathbf{K} \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^\top \mathbf{K} \mathbf{J} (\mathbf{J}^\top \mathbf{K} \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^\top \mathbf{K} \right\} \nu \\ \mathcal{K}(\nu_{fri}, \nu_{comp}) &= \nu^\top \mathbf{K} \mathbf{J} \left\{ (\mathbf{J}^\top \mathbf{K} \mathbf{J})^{-1} \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{J}^\top \mathbf{K} \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^\top \mathbf{K} \mathbf{J} (\mathbf{J}^\top \mathbf{K} \mathbf{J})^{-1} \right\} \mathbf{J}^\top \mathbf{K} \nu \end{aligned}$$

Vi definerer den symmetriske matrisen $\mathbf{Q} \triangleq (\mathbf{J}^\top \mathbf{K} \mathbf{J})$. \mathbf{Q} er inverterbar da \mathbf{J} har full kolonnerang. Dette gir oss:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\nu_{fri}, \nu_{comp}) &= \nu^\top \mathbf{K} \mathbf{J} \left\{ \mathbf{Q}^{-1} - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} \right\} \mathbf{J}^\top \mathbf{K} \nu \\ &= \nu^\top \mathbf{K} \mathbf{J} \mathbf{0}_{6 \times 6} \mathbf{J}^\top \mathbf{K} \nu \end{aligned}$$

Dette gir oss følgende resultat:

$$\mathcal{K}(\nu_{fri}, \nu_{comp}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{T}_{fri} \text{ og } \mathcal{T}_{comp} \text{ er } \mathcal{K}\text{-ortogonale}$$

■

2.4 Dynamisk modell for robotmanipulator

Anvendelse av Euler-Lagrange ligningen gir en dynamisk modell for en n-leddet robotmanipulator på formen [Spong og Vidyasagar 1989]:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.117)$$

der

- $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^\top$ er en vektor av leddvariable, $\dim\{\mathbf{q}\}=(n \times 1)$
- $\mathbf{D}(\mathbf{q})$ er manipulatorens treghetsmatrise, $\dim\{\mathbf{D}\}=(n \times n)$
- $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ er en vektor av coriolis/sentrifugal-krefter, $\dim\{\mathbf{C}\}=(n \times n)$
- $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ er en vektor av tyngdekrefter/momenter, $\dim\{\mathbf{g}\}=(n \times 1)$
- $\boldsymbol{\tau}$ er en vektor av leddmomenter, $\dim\{\boldsymbol{\tau}\}=(n \times 1)$

Hvis manipulatorens griper er i kontakt med omgivelsene får modellen formen:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{f} \quad (2.118)$$

der

- $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ er manipulatorens jacobimatrise
- \mathbf{f} er kontaktkraften

En viktig egenskap ved disse modellene som vi skal få bruk for senere er

Teorem 2.3 *Matrisen $\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ er skjevsymmetrisk.* ■

Bevis:

Se for eksempel [Spong og Vidyasagar 1989]. ■

En annen egenskap med modellen som vi vil få bruk for i stabilitetsbevis er:

Påstand 2.10

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{C} + \mathbf{C}^T \quad (2.119)$$

■

Bevis:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{D}} - 2\mathbf{C} &= -\dot{\mathbf{D}} + 2\mathbf{C}^T \text{ da } \mathbf{D} \text{ er symmetrisk} \\ 2\dot{\mathbf{D}} &= 2\mathbf{C} + 2\mathbf{C}^T \\ \dot{\mathbf{D}} &= \mathbf{C} + \mathbf{C}^T \text{ q.e.d.} \end{aligned} \quad (2.120)$$

■

Vi vil også få bruk for å kunne finne en begrensning på matrisen \mathbf{C} .

Teorem 2.4 $\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\|$ er lineær i $\|\dot{\mathbf{q}}\|$ og begrenset, det vil si:

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq k_C \|\dot{\mathbf{q}}\| \quad (2.121)$$

■

Bevis:

Uttrykket for $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \{c_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\}$ er gitt ved [Spong og Vidyasagar 1989]:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial d_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} \right\} \dot{q}_k \quad (2.122)$$

der $\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \{d_{ij}\}$ og $i, j = 1, \dots, n$ og c_{ij} er de såkalte Christoffel symbolene. Siden \mathbf{D} er manipulatorens treghetsmatrise er den begrenset i \mathbf{q} og det er også matrisen $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{q}}$. Vi ser da av ligning (2.122) at c_{ij} er begrenset i \mathbf{q} og lineær i $\dot{\mathbf{q}}$. Det følger da at det eksisterer en konstant k_C slik at $\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq k_C \|\dot{\mathbf{q}}\|$ ■

2.5 Oppgavekoordinater

Når manipulatorene er i kontakt med omgivelsene, som er tilfellet i kraftstyring, er det mer hensiktsmessig å beskrive dynamikken i oppgaverommet [Khatib 1987]. Manipulatorens tilstand blir nå beskrevet av en vektor \mathbf{x} som inneholder griperens konfigurasjon. Vi trenger en sammenheng mellom \mathbf{q} og \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (2.123)$$

der $\mathbf{f}(\cdot)$ beskriver manipulatorens foroverkinematikk. Vi har videre sammenhengen:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.124)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} \quad (2.125)$$

Der $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ er manipulatorens geometriske Jacobimatrise. Denne må ikke forveksles med twistjacobimatrisen, \mathbf{J} , definert i ligning (2.90). Vi har nå følgende uttrykk for $\dot{\mathbf{q}}$ og $\ddot{\mathbf{q}}$:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{x}} \quad (2.126)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{x}} \quad (2.127)$$

Setter så inn ligningene (2.126) og (2.127) i modellen (2.118).

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1} \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{D}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T \mathbf{f} \quad (2.128)$$

Vi innfører nå notasjonen

- $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{D}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$
- $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) - \underbrace{\mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{D}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})}_{\mathbf{D}(\mathbf{x})}$
- $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{g}(\mathbf{q})$
- $\mathbf{u} = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}$

Dette gir oss følgende dynamiske modell :

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{u} - \mathbf{f} \quad (2.129)$$

Denne modellen vil vi bruke for å beskrive en manipulator med kun tre translasjonsledd, slik at \mathbf{x} er griperens posisjon i \mathbb{R}^3 . For en manipulator med 6DOF vil vi bruke modellen:

$$\mathbf{D}(\mathbf{T}) \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} + \mathbf{g}(\mathbf{T}) = \mathbf{u} - \mathbf{w} \quad (2.130)$$

Der $\mathbf{T} \in SE(3)$ beskriver griperens posisjon og orientering, og $\boldsymbol{\nu} \in se(3)$ er en hastighetskrue som beskriver griperens vinkel- og translasjonshastighet. Merk at den samme notasjonen \mathbf{D} brukes for de forskjellige matrisene $\mathbf{D}(\mathbf{x})$, $\mathbf{D}(\mathbf{q})$ og $\mathbf{D}(\mathbf{T})$. Det samme gjelder for \mathbf{C} og \mathbf{g} .

Teorem 2.5 *Egenskapen i teorem (2.3) gjelder også når den dynamiske modellen er uttrykt i oppgavekoordinater.* ■

Bevis:

Vi deriverer $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ etter produktregelen:

$$\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{J}}^{-T} \mathbf{D}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}^{-T} \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}^{-T} \mathbf{D}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}^{-1} \quad (2.131)$$

Trekker fra uttrykket for $2\mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ og får:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{x}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \dot{\mathbf{J}}^{-T} \mathbf{D}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}^{-T} \mathbf{D}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}^{-1} + 2\mathbf{J}^{-T} \mathbf{D}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \mathbf{J}^{-1} \\ &\quad + \mathbf{J}^{-T} (\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \mathbf{J}^{-1} \end{aligned} \quad (2.132)$$

For å rydde opp i dette trenger vi sammenhengen $\mathbf{J}^{-1} \mathbf{J} = \mathbf{I}_{n \times n}$

Derivasjon av dette gir $\dot{\mathbf{J}}^{-1} \mathbf{J} + \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} = \mathbf{0}_{n \times n}$ og vi får følgende uttrykk for $\dot{\mathbf{J}}$:

$$\dot{\mathbf{J}} = -\mathbf{J} \dot{\mathbf{J}}^{-1} \mathbf{J} \quad (2.133)$$

(2.132) kan nå forenkles til:

$$\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{x}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \dot{\mathbf{J}}^{-T} \mathbf{D}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1} - \mathbf{J}^{-T} \mathbf{D}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}^{-1} + \mathbf{J}^{-T} (\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \mathbf{J}^{-1} \quad (2.134)$$

Transponerer (2.134) og får

$$\left(\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{x}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \right)^T = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{D}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}^{-1} - \mathbf{J}^{-T} \mathbf{D}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}^{-T} (\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \mathbf{J}^{-1} \quad (2.135)$$

Hvis vi sammenligner ligningene (2.134) og (2.135) ser vi :

$$\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{x}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = - \left(\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{x}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \right)^T \quad (2.136)$$

■

Det følger åpenbart at sammenhengen (2.119) også gjelder i oppgavekoordinater.

I stabilitetsbevisene vil vi få bruk for å finne øvre begrensninger på leddene i den dynamiske modellen, og vi vil derfor utlede hvordan vi kan finne en begrensning på coriolismatrisen.

Teorem 2.6 *For en dynamisk robotmodell i oppgavekoordinater for der \mathbf{x} betegner griperposisjon i \mathbb{R}^3 vil $\|\mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\|$ være lineær i $\|\dot{\mathbf{x}}\|$ og begrenset. Det vil si:*

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\| \leq k'_C \|\dot{\mathbf{x}}\| \quad (2.137)$$

■

Bevis:

Fra ligningen for $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ har vi:

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\| \leq \|\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\|^2 \left(\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| + \|\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\| \|\mathbf{D}(\mathbf{q})\| \|\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\| \right) \quad (2.138)$$

Hvis vi antar at manipulatorene er i en ikke-singulær konfigurasjon har vi følgende begrensning på $\|\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\|$:

$$0 < \|\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\| = \sigma_1 < \infty \quad (2.139)$$

der σ_1 er nedre singularverdi til $\mathbf{J}(\mathbf{q})$. Vi setter inn (2.121) og (2.139) i (2.138) og får:

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\| \leq \sigma_1^2 \left(k_c \|\dot{\mathbf{q}}\| + \sigma_1 \|\mathbf{D}(\mathbf{q})\| \|\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\| \right) \quad (2.140)$$

$\mathbf{D}(\mathbf{q})$ er begrenset i \mathbf{q} og $\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})$ er begrenset i \mathbf{q} og lineær i $\dot{\mathbf{q}}$. Det vil si:

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{q})\| \leq M \quad \text{og} \quad \|\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\| \leq N \|\dot{\mathbf{q}}\| \quad (2.141)$$

Vi får dermed

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\| \leq \sigma_1^2 \left(k_c \|\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\| \|\dot{\mathbf{x}}\| + \sigma_1 M N \|\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\| \|\dot{\mathbf{x}}\| \right) \quad (2.142)$$

som kan skrives

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\| \leq k'_C \|\dot{\mathbf{x}}\| \quad \text{der} \quad k'_C \triangleq \sigma_1^3 k_c + \sigma_1^4 M N \quad (2.143)$$

■

Når robotmodellen er gitt som i ligning (2.130) vil vi også ha en slik begrensning:

Teorem 2.7 *For en dynamisk robotmodell i 6DOF vil coriolis-matrisen være øvre begrenset.* ■

Bevis:

$$\mathbf{C}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{D}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \quad (2.144)$$

Siden den euklidske norm av $\boldsymbol{\nu}$ ikke eksisterer, finner vi en begrensning i $\dot{\mathbf{q}}$:

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\nu})\| \leq C_{\max} \quad \text{der} \quad C_{\max} = \left(\sigma_1^2 k_c + \sigma_1^3 M N \right) \max \{ \|\dot{\mathbf{q}}\| \} \quad (2.145)$$

■

2.6 Lyapunovteori

Vi vil her gi en kort innføring i Lyapunovstabilitet for ulineære systemer. Referanser for dette kapitlet er [Spong og Vidyasagar 1989] og [Vidyasagar 1993]. Anta at vi har et ulineært system på \mathbb{R}^n gitt ved:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.146)$$

og at dette systemet har et singulært punkt i origo slik at $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Hvis det aktuelle systemet ikke har et singulært punkt i origo, men et singulært punkt \mathbf{x}_0 , kan det alltid utføres et koordinatskifte på \mathbb{R}^n slik at origo blir det singulære punkt.

Definisjon 2.26 *Origo er et stabilt singulært punkt hvis*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) \mid \|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|\mathbf{x}\| < \varepsilon \forall t > t_0$$

■

Definisjon 2.27 *Origo er et asymptotisk singulært punkt hvis det er stabilt og i tillegg:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = \mathbf{0}$$

■

Definisjon 2.28 *La $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ være en funksjon av klasse C^1 som er definert i en omegn av origo. Hvis V er positiv definit, det vil si*

$$V(\mathbf{x}) > 0 \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ og } V(\mathbf{0}) = 0$$

er $V(\mathbf{x})$ en Lyapunovfunksjonskandidat (LFK) for systemet (2.146).

■

Teorem 2.8 *Hvis det eksisterer en LFK for systemet (2.146) slik at*

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

det vil si den tidsderiverte av $V(\mathbf{x})$ langs systemets løsningsstrajektorer er negativ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, er origo et asymptotisk stabilt singulært punkt.

■

Det kan være vanskelig å finne en LFK som oppfyller $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \forall \mathbf{x}$. Istedet vil det ofte være mulig å finne en LFK der $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \forall \mathbf{x}$. Asymptotisk stabilitet kan allikevel vises hvis $V(\mathbf{x})$ oppfyller LaSalles teorem som lyder:

Teorem 2.9 *Hvis det eksisterer en LFK for systemet (2.146) og $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \forall \mathbf{x}$ så er origo et asymptotisk stabilt singulært punkt hvis $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ er den eneste løsningen til $\dot{V} \equiv 0$*

■

2.7 Lyapunovfunksjoner med kryssledd

For stabilitetsanalyse av et dynamisk system vil en energibasert LFK, V , typisk ha en derivert, \dot{V} , som er negativ semidefinit. For å omgå dette kan man bruke en vektmatrise \mathbf{P} som inneholder ikkediagonale elementer, heretter kalt kryssledd (se for eksempel

[Koditschek 1988] og [Arimoto og Miyazaki 1984]). Bruk av kryssledd i en energibasert LFK kan føre til at \dot{V} blir negativ definit i en omegn om origo, og ikke bare seminegativ definit [Koditschek 1988]. Dette gjør at vi unngår bruk av LaSalles teorem. Vi skal nå se på sammenhengen mellom kryssledd i en energibasert LFK og en variabel av typen

$$\mathbf{m} = \mathbf{x} + \rho \dot{\mathbf{x}} \quad (2.147)$$

Vi betrakter en LFK av typen

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z} \quad (2.148)$$

der

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \rho \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \rho \mathbf{D} & \mathbf{K}_P + \rho \mathbf{K}_D & \mathbf{K}_I \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_I & \alpha \mathbf{K}_I \end{bmatrix}$$

som er brukt i [Arimoto og Miyazaki 1984] for å studere stabilitet av PID-regulering av robotmanipulator med kontaktkraft. En lignende LFK brukes også i [Chiaverini og Siciliano 1991] og [Chiaverini, Siciliano og Villani 1992]. Vi ser at (2.148) kan skrives på formen:

$$V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \rho \mathbf{D} \\ \rho \mathbf{D} & \rho \mathbf{K}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_P & \mathbf{K}_I \\ \mathbf{K}_I & \alpha \mathbf{K}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (2.149)$$

Vi utfører nå en similaritetstransformasjon på vektmatrisene i (2.149) slik at disse blir diagonale. Dette gir oss:

$$V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + \rho \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho \mathbf{K}_D - \rho^2 \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + \rho \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{K}_I \mathbf{s} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha \mathbf{K}_I - \mathbf{K}_I \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{K}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{K}_I \mathbf{s} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (2.150)$$

Som vi ser har vi nå omformet V til en sum av to kvadratiske former i variabler av typen \mathbf{m} . Det er tydelig at slike variabler fremkommer når vi diagonaliserer en LFK med kryssledd.

Kravet om at V skal være positiv definit gir oss nå enkelt:

1.

$$\begin{aligned} \mathbf{D} (\rho \mathbf{K}_D - \rho^2 \mathbf{D}) &> \mathbf{0} \\ \Downarrow \mathbf{D} > \mathbf{0}, \rho > 0 \\ \mathbf{K}_D &> \rho \mathbf{D} \end{aligned} \quad (2.151)$$

2.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_P (\alpha \mathbf{K}_I - \mathbf{K}_I \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{K}_I) &> \mathbf{0} \\ \Downarrow \mathbf{K}_I, \mathbf{K}_P > \mathbf{0} \\ \alpha \mathbf{I}_{6 \times 6} &> \mathbf{K}_I \mathbf{K}_P^{-1} \\ \mathbf{K}_I &< \alpha \mathbf{K}_P \end{aligned} \quad (2.152)$$

Hvis \mathbf{K}_P , \mathbf{K}_I og \mathbf{K}_D er regulatorparametrefor en PID-regulator ser vi at vi har fått krav som må stilles til disse for at systemet skal være stabilt. I tillegg kommer naturligvis kravet $\dot{V} < 0$ som vil være avhengig av systemet vi analyserer.

2.8 Regulering og stabilitetsanalyse på $SE(3)$

Vi skal i dette kapitlet se på en metode for å analysere stabiliteten til dynamiske systemer definert på $SE(3)$. I vårt tilfelle er det konfigurasjonen til griperen på en robotmanipulator som skal analyseres. Robotens dynamiske modell er gitt ved:

$$\mathbf{D}(\mathbf{T})^B \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}(\mathbf{T}, {}^B \boldsymbol{\nu})^B \boldsymbol{\nu} + {}^B \mathbf{g}(\mathbf{T}) = {}^B \mathbf{u} - {}^B \mathbf{w} \quad (2.153)$$

der

- $\boldsymbol{\nu} \in se(3)$ er griperens hastighetsskrue (twist).
- $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^I \mathbf{R}_I^B & {}^I \mathbf{p}_I^B \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$ beskriver griperens orientering og posisjon.
- $\mathbf{D}(\mathbf{T}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ er manipulatorens treghetsmatrise.
- $\mathbf{C}(\mathbf{T}, {}^B \boldsymbol{\nu}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ er en matrise av sentripetal- og coriolis-ledd.
- ${}^B \mathbf{g}(\mathbf{T}) \in \mathbb{R}^6$ er en vektor av tyngde-krefter og -momenter.
- ${}^B \mathbf{w} \in se^*(3)$ er en vektor av ytre momenter og krefter.
- ${}^B \mathbf{u} \in \mathbb{R}^6$ er pådrag fra regulatoren.

For å få et enkelt system å analysere bruker vi her en ulineær regulator gitt ved:

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}(\mathbf{T}) \mathbf{M}_d^{-1} \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\nu}) + \mathbf{g}(\mathbf{T}) + \mathbf{w} \quad (2.154)$$

der \mathbf{M}_d er en ønsket treghetsmatrise og $\tilde{\mathbf{u}}$ er et nytt pådrag. Regulatoren (2.154) reduserer dynamikken (2.153) til:

$$\mathbf{M}_d \dot{\boldsymbol{\nu}} = \tilde{\mathbf{u}} \quad (2.155)$$

Hvis vi velger $\mathbf{M}_d = \mathbf{I}_{6 \times 6}$ får vi det dekkoblede systemet:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\boldsymbol{\nu}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_R \\ \tilde{\mathbf{u}}_P \end{bmatrix} \quad (2.156)$$

der indeksene R og P står for henholdsvis rotasjon og posisjon. Målet er å styre griperens konfigurasjon, $\mathbf{T} \in SE(3)$ til en konstant referanseverdi gitt ved:

$$\mathbf{T}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_d & \mathbf{p}_d \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix} \in SE(3) \quad (2.157)$$

slik at denne tilstanden er stabil. Vi vil nå se på rotasjonsdelen og posisjonsdelen av systemet hver for seg.

2.8.1 Posisjonsdelen

For posisjonen har vi den kinematiske ligningen

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \quad (2.158)$$

der $\mathbf{p} \triangleq {}^B\mathbf{p}$ og $\mathbf{v} \triangleq {}^B\mathbf{v}$. Dynamikken er gitt ved:

$$\dot{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{u}}_P \quad (2.159)$$

som følger av ligning (2.156). Vi definerer reguleringsavviket $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_d - \mathbf{p}$ slik at $\dot{\tilde{\mathbf{p}}} = -\dot{\mathbf{p}}$ og $\ddot{\tilde{\mathbf{p}}} = -\ddot{\mathbf{p}}$. Vi velger å regulere med en regulator med PD-struktur. Regulatoren er gitt ved:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_P &= \mathbf{K}_{DP}\dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \mathbf{K}_{PP}\tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{u}}_P &= -\mathbf{K}_{DP}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_{PP}\tilde{\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (2.160)$$

der regulatorparameterene er gitt ved:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{DP} &= k_{DP}\mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{K}_{PP} &= k_{PP}\mathbf{I}_{3 \times 3} \end{aligned}$$

I lukket sløyfe får vi nå feildynamikken:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{p}}} + k_{DP}\dot{\tilde{\mathbf{p}}} + k_{PP}\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{0}_3 \quad (2.161)$$

Vi ser at k_{DP} og k_{PP} kan velges slik at $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{0}_3$ er en stabil likevekttilstand. Vi skal også påvise stabilitet ved å bruke Lyapunovs metode med en kvadratisk form med kryssledd som LFK som beskrevet i kapittel 2.7. Vi velger en energibasert LFK på formen:

$$V_P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \rho\mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \rho\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{K}_{PP} + \rho\mathbf{K}_{DP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (2.162)$$

Der ρ er en positiv skalar. Diagonalisering av vektmatrisen gir:

$$V_P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \rho\tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{K}_{PP} + \rho\mathbf{K}_{DP} - \rho\mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \rho\tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (2.163)$$

Vi ser at for at V skal være positiv definittt kreves:

$$\mathbf{K}_{PP} > \rho^2\mathbf{I}_{3 \times 3} - \rho\mathbf{K}_{DP} \quad (2.164)$$

Utregning av \dot{V}_P gir oss:

$$\begin{aligned} \dot{V}_P &= -\dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T \mathbf{K}_{DP}\dot{\tilde{\mathbf{p}}} - \dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T \mathbf{K}_{PP}\tilde{\mathbf{p}} + \rho\dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T \dot{\tilde{\mathbf{p}}} - \rho\tilde{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}_{DP}\dot{\tilde{\mathbf{p}}} \\ &\quad - \rho\tilde{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}_{PP}\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}_{PP}\dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \rho\tilde{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}_{DP}\dot{\tilde{\mathbf{p}}} \end{aligned} \quad (2.165)$$

som kan forenkles til

$$\dot{V}_P = -\dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T (\mathbf{K}_{DP} - \rho\mathbf{I}_{3 \times 3}) \dot{\tilde{\mathbf{p}}} - \rho\tilde{\mathbf{p}}^T \mathbf{K}_{PP}\tilde{\mathbf{p}} \quad (2.166)$$

For at \dot{V} skal være negativ definittt kreves nå

$$\mathbf{K}_{DP} > \rho\mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \text{og} \quad \mathbf{K}_{PP} > \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad (2.167)$$

siden ρ ikke inngår i regulatoren kan denne velges fritt, og kravene (2.164) og (2.167) kan oppfylles og posisjonsdelen av systemet er dermed lokalt asymptotisk stabilt.

2.8.2 Rotasjonsdelen

For orienteringen til griperen har vi følgende kinematiske differensialligning:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \quad (2.168)$$

der $\mathbf{R} \triangleq {}^I\mathbf{R}_I^B$ og $\boldsymbol{\omega} \triangleq {}^B\boldsymbol{\omega}_{B/I}$. Dynamikken er gitt ved:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\mathbf{u}}_R \quad (2.169)$$

som følger av ligning (2.156). For enkelhets skyld setter vi orienteringsreferansen $\mathbf{R}_d = \mathbf{I}_{3 \times 3}$. Vi definerer $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}_d - \boldsymbol{\omega}$ og $\boldsymbol{\omega}_d = \mathbf{0}_3$ slik at $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega}$ og $\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} = -\dot{\boldsymbol{\omega}}$. Vi parametriserer $\mathbf{R} \in SO(3)$ med eulerparametrene som beskrevet i kapittel 2.2.1. Det vil si $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\eta, \boldsymbol{\epsilon}}$ der η og $\boldsymbol{\epsilon}$ oppfyller de kinematiske differensialligningene gitt i (2.1). Vi velger også her en regulator med en PD-struktur:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_R &= \mathbf{K}_{DR}\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{K}_{PR}\boldsymbol{\epsilon} \\ \tilde{\mathbf{u}}_R &= -\mathbf{K}_{DR}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{K}_{PR}\boldsymbol{\epsilon} \end{aligned} \quad (2.170)$$

der regulatorparameterene er gitt av

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{DR} &= k_{DR}\mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{K}_{PR} &= k_{PR}\mathbf{I}_{3 \times 3} \end{aligned}$$

I lukket sløyfe får vi dynamikken:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} + \mathbf{K}_{DR}\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{K}_{PR}\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}_3 \quad (2.171)$$

For å vise stabilitet av rotasjonsdelen av systemet bruker vi en LFK foreslått i [Wen og Kreutz 1991]:

$$V_R = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega} + \beta\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\omega} + (k_{PR} + \beta k_{DR})(\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\epsilon} + (\eta - 1)^2) \quad (2.172)$$

Der β er en positiv skalar som kan velges fritt. V_R kan skrives på matriseform:

$$V_R = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\epsilon} \\ 1 - \eta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \beta\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_3 \\ \beta\mathbf{I}_{3 \times 3} & 2(k_{PR} + \beta k_{DR})\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3^T & \mathbf{0}_3^T & 2(k_{PR} + \beta k_{DR}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\epsilon} \\ 1 - \eta \end{bmatrix} \quad (2.173)$$

Vi ser at V_R er positiv definit for alle k_{PR} og k_{DR} forutsatt at β velges slik at

$$\beta < 2k_{DR} + \frac{2k_{PR}}{\beta} \quad (2.174)$$

Den deriverte av denne LFK langs systemets løsningstrajektorer blir:

$$\begin{aligned} \dot{V}_R &= \boldsymbol{\omega}^T\dot{\boldsymbol{\omega}} + \beta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T\boldsymbol{\omega} + \beta\boldsymbol{\epsilon}^T\dot{\boldsymbol{\omega}} + 2(k_{PR} + \beta k_D)(\boldsymbol{\epsilon}^T\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + (\eta - 1)\dot{\eta}) \\ \dot{V}_R &= -k_{DR}\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega} - k_{PR}\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\epsilon} - k_{DR}\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\omega} - k_{PR}\beta\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\beta}{2}\eta\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega} + (k_{PR} + \beta k_{DR})\eta\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\omega} \\ &\quad - (k_{PR} + \beta k_{DR})\eta\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\omega} + (k_{PR} + \beta k_{DR})\eta^T\boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (2.175)$$

Vi finner av dette en øvre begrensning på \dot{V} ved:

$$\dot{V}_R \leq - \left(k_{DR} - \frac{\beta}{2} \right) \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} - k_{PR} \beta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.176)$$

Vi ser at \dot{V} er negativ definit for alle k_{PR} og k_{DR} hvis β velges slik at:

$$\beta < 2k_{DR} \quad (2.177)$$

Av ligningene (2.174) og (2.177) ser vi at (2.177) impliserer (2.174). Rotasjonsdelen av systemet er dermed lokalt asymptotisk stabil forutsatt at (2.177) er oppfylt.

Det er i litteraturen foreslått andre mulige regulatorer for å styre rotasjonsdelen av systemet. Se for eksempel [Wen og Kreutz 1991] og [Egeland 1993]. Disse regulatorene innbærer blant annet tilbakekobling fra eulerrotasjonen og Euler-Rodriguez-parameteren. Stabiliteten av disse regulatorene kan analyseres på tilsvarende måte som ovenfor.

2.8.3 Konklusjon

Utfra resultatene i kapitlene 2.8.1 og 2.8.2 konkluderer vi med at stabilitet på $SE(3)$ kan analyseres ved hjelp av Lyapunovs metode når $\mathbf{R} \in SO(3)$ parametriseres med Eulerparameterene $(\eta, \boldsymbol{\epsilon})$.

Bruken av kryssledd i Lyapunovfunksjonskandidatene (2.162) og (2.173) medfører at vi kan påvise lokal asymptotisk stabilitet. Det vil si

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix} \in SE(3) \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \mathbf{R}_d & \mathbf{p}_d \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix} \in SE(3) \quad \text{asymptotisk} \quad (2.178)$$

Det må nevnes her at siden $\mathbf{R} = \mathbf{R}_d \Leftrightarrow \eta = \pm 1$, $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}_3$ vil vi få to likevektspunkter der $\eta = -1$ vil representere et ustabil likevektspunkt og $\eta = 1$ vil representere et stabilt likevektspunkt. En nærmere analyse av denne stabiliteten er foretatt i [Egeland 1993].

Kapittel 3

Parallell Kraft/posisjonsstyring i 3 DOF

Vi vil her presentere den parallelle kraft/posisjon styringen som er utviklet i [Chiaverini og Siciliano 1991] og [Chiaverini, Siciliano og Villani 1992]. Først vil vi utlede en total modell for robotmanipulator, regulator og kontaktkraft, og så vil vi ved hjelp av Lyapunovs metode finne krav til regulatorparametrene for at systemet skal være asymptotisk stabilt. Vi definerer følgende koordinatsystemer:

- Basesystem: I
- Gripersystem: B

3.1 Dynamisk robotmodell

Vi betrakter nå en robotmanipulator med tre ledd og med en dynamisk modell gitt i oppgavekoordinater, I , (se kap 2.5) ved:

$$D(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + C(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{u} - \mathbf{f} \quad (3.1)$$

der \mathbf{x} betegner griperens posisjon i rommet. \mathbf{u} er pådrag fra regulatoren og \mathbf{f} er kontaktkraft som følge av interaksjon med omgivelsene. Alle disse vektorene er dekomponert i I .

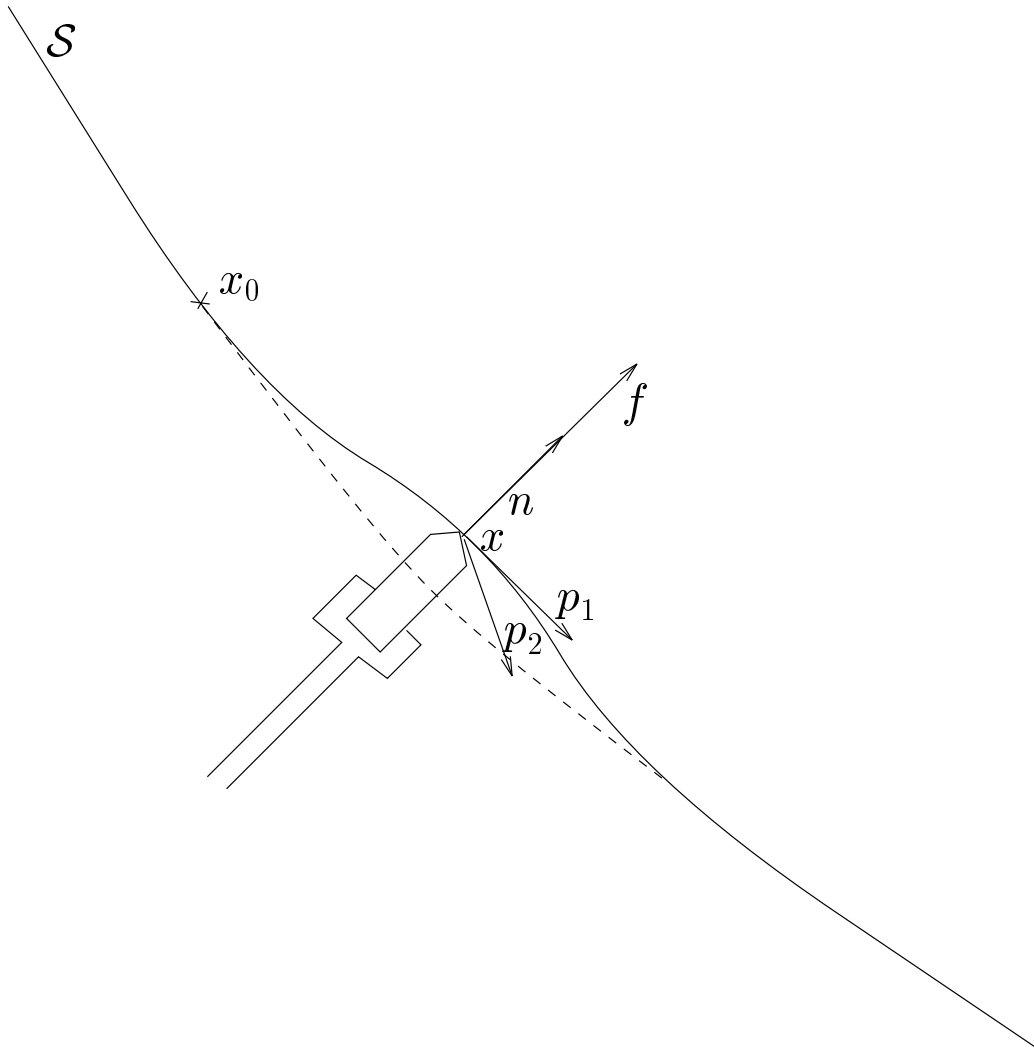
3.2 Modell av kontaktkraft

Vi antar at (3.1) er den dynamiske modellen til en ikke-redundant manipulator uten singulariteter. Kraften fra manipulatoren på omgivelsene modelleres som en fjærkraft:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (3.2)$$

der

- \mathbf{K} er en konstant $\{3 \times 3\}$ symmetrisk stivhets-matrise som kan sees på som en lineær mapping mellom \mathbf{x} og \mathbf{f}
- \mathbf{x} er koordinatene til kontaktpunktet
- \mathbf{x}_0 er et punkt i kontaktplanet som er i ro



Figur 3.1: Kontaktkraft

Vi har at kontaktkraften er ortogonal til kontaktplanet, \mathcal{S} , for enhver vektor $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Dette er illustrert i figur 3.1. Dette betyr at

$$\text{rang}(\mathbf{K}) = r = 1 \quad (3.3)$$

som impliserer at

$$\dim\{\mathcal{R}(\mathbf{K})\} = 1 \quad (3.4)$$

der $\mathcal{R}(\mathbf{K})$ er kolonnerommet til \mathbf{K} . Videre er en basis for $\mathcal{R}(\mathbf{K})$ gitt av \mathbf{n} som er en enhetsnormal til \mathcal{S} . Det vil si:

$$\mathcal{R}(\mathbf{K}) = \text{span}\{\mathbf{n}\} \quad (3.5)$$

Dimensjonen til $\mathcal{R}(\mathbf{K})^\perp$ er gitt som

$$\dim\{\mathcal{R}(\mathbf{K})^\perp\} = 3 - r = 2 \quad (3.6)$$

og en basis for $\mathcal{R}(\mathbf{K})^\perp$ er gitt av enhetsvektorene \mathbf{p}_1 og \mathbf{p}_2 som er lineært uavhengige og tangenter til \mathcal{S} . Det vil si:

$$\mathcal{R}(\mathbf{K})^\perp = \text{span}\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\} \quad (3.7)$$

Matrisen \mathbf{K} kan nå skrives som

$$\mathbf{K} = k\mathbf{n}\mathbf{n}^\text{T} \quad (3.8)$$

der k er stivhetskoeffisienten i retningen gitt av \mathbf{n} . Siden \mathbf{K} er symmetrisk, det vil si $\mathbf{K} = \mathbf{K}^\text{T}$ har vi følgende sammenhenger som gjelder for nullrommet til \mathbf{K} :

$$\mathcal{R}(\mathbf{K}^\text{T}) = \mathcal{N}(\mathbf{K})^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{K}) \quad (3.9)$$

og

$$\mathcal{N}(\mathbf{K}^\text{T}) = \mathcal{R}(\mathbf{K})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{K}) \quad (3.10)$$

Av dette følger:

$$\mathcal{R}(\mathbf{K})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{K}). \quad (3.11)$$

Det vil si $\mathcal{R}(\mathbf{K})$ og $\mathcal{N}(\mathbf{K})$ er ortogonale komplementer og følgelig er

$$\mathcal{R}(\mathbf{K}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{K}) = \mathbb{R}^3 \quad (3.12)$$

slik at

$$\text{span}\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{n}\} = \mathbb{R}^3. \quad (3.13)$$

På grunn av denne symmetrien vil vi i det følgende ikke skille mellom $\mathcal{R}(\mathbf{K})$, $\mathcal{R}(\mathbf{K}^\text{T})$ og $\mathcal{N}(\mathbf{K})$, $\mathcal{N}(\mathbf{K}^\text{T})$.

Siden \mathbf{K} er av rang 1 eksisterer ikke den inverse. Istedet vil vi bruke en generalisert invers. Vi henter følgende definisjoner fra [Samson 1991]:

Definisjon 3.1 *Matrisen \mathbf{A}^- er en generalisert invers til \mathbf{A} hvis*

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^-\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (3.14)$$

■

Definisjon 3.2 *En matrise \mathbf{A}^- en reflektiv generalisert invers til \mathbf{A} hvis den er en generalisert invers og*

$$\mathbf{A}^-\mathbf{A}\mathbf{A}^- = \mathbf{A}^- \quad (3.15)$$

■

Påstand 3.1 \mathbf{K}^- er en refleksiv generalisert invers til \mathbf{K} og er gitt ved:

$$\mathbf{K}^- = \frac{1}{k} \mathbf{n} \mathbf{n}^T \quad (3.16)$$

■

Bevis:

Vi ser at $\mathbf{K} \mathbf{K}^- \mathbf{K} = k \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{n} \mathbf{n}^T = k \mathbf{n} \mathbf{n}^T = \mathbf{K}$. Dermed har vi at \mathbf{K}^- er en generalisert invers. Videre har vi at $\mathbf{K}^- \mathbf{K} \mathbf{K}^- = \frac{1}{k} \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{n} \mathbf{n}^T = \frac{1}{k} \mathbf{n} \mathbf{n}^T = \mathbf{K}^-$. \mathbf{K}^- er dermed en refleksiv generalisert invers til \mathbf{K} , q.e.d. ■

Vi ser at

$$\mathbf{K} \mathbf{K}^- = \mathbf{K}^- \mathbf{K} = \mathbf{n} \mathbf{n}^T \quad (3.17)$$

Påstand 3.2 Gitt vektorene $\mathbf{a} \in \mathcal{R}(\mathbf{K})$ og $\mathbf{b} \in \mathcal{R}(\mathbf{K})^\perp$ der $\mathcal{R}(\mathbf{K})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{K})$. For matrisen $\mathbf{n} \mathbf{n}^T$ gjelder da:

$$\mathbf{n} \mathbf{n}^T (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \quad (3.18)$$

■

Bevis:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \in \mathcal{R}(\mathbf{K}) &\Rightarrow \mathbf{a} = c_1 \mathbf{n}, \quad c_1 \in \mathbb{R} \\ \mathbf{b} \in \mathcal{N}(\mathbf{K}) &\Rightarrow \mathbf{b} = c_2 \mathbf{p}_1 + c_3 \mathbf{p}_2, \quad c_2, c_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Vi har da at

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \mathbf{n}^T (\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \mathbf{n} \mathbf{n}^T (c_1 \mathbf{n} + c_2 \mathbf{p}_1 + c_3 \mathbf{p}_2) \\ &= c_1 \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{n} + c_2 \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{p}_1 + c_3 \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{p}_2 \\ &= c_1 \mathbf{n} \\ &= \mathbf{a} \end{aligned}$$

siden $\mathbf{n}^T \mathbf{n} = 1$ og $\mathbf{n}^T \mathbf{p}_1 = \mathbf{n}^T \mathbf{p}_2 = 0$ fordi $\mathbf{n} \perp \mathbf{p}_1 \perp \mathbf{p}_2$. Påstanden er dermed bevist. ■

Siden $(\mathbf{K} \mathbf{K} \mathbf{K}^-)^T = \mathbf{K} = \mathbf{K} \mathbf{K} \mathbf{K}^-$ og $(\mathbf{K} \mathbf{K}^- \mathbf{K}) = \mathbf{K} = \mathbf{K} \mathbf{K}^- \mathbf{K}$ og \mathbf{K}^- er den refleksive generaliserte inverse til \mathbf{K} har vi ifølge ligning 31-34 i [Doty, Melchiorri og Bonivento 1993] at \mathbf{K}^- også er den \mathcal{K} -vektede pseudoinverse til \mathbf{K} som definert i ligning (2.104). Det vil si:

$$\mathbf{K}^- = \mathbf{K}_K^\dagger \quad (3.19)$$

Matrisen $\mathbf{K} \mathbf{K}_K^\dagger = \mathbf{n} \mathbf{n}^T$ kalles i følge [Doty, Melchiorri og Bonivento 1993] et filter fordi:

$$\mathbf{K} \mathbf{K}_K^\dagger (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{R}(\mathbf{K}), \mathbf{b} \in \mathcal{R}(\mathbf{K})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{K}) \quad (3.20)$$

3.3 Parallell regulering i 3 DOF

3.3.1 PID-regulator

Vi skal nå presentere en regulator for systemet (3.1). De *konstante* referansene manipulatoren skal følge er gitt ved:

$$\begin{aligned} \text{Posisjon} &: \mathbf{x}_d \in \mathbb{R}^3 \\ \text{Kraft} &: \mathbf{f}_d \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Reguleringsavvikene defineres ved:

- Posisjon:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x} \quad (3.21)$$

- Kraft:

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}_d - \mathbf{f} \quad (3.22)$$

For å regulere systemet (3.1) foreslås det i [Chiaverini og Siciliano 1991] og [Chiaverini, Siciliano og Villani 1992] en regulator med PD-virkning på posisjon, PI-virkning på kraft, tyngdekraftskompensasjon og foroverkobling fra kraftreferanse. Dette gir oss følgende regulatorstruktur:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_D \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_p \Delta \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_d + \mathbf{K}_F \Delta \mathbf{f} + \mathbf{K}_I \int_0^T \Delta \mathbf{f} d\sigma \quad (3.23)$$

Det er viktig å legge merke til at regulatoren ikke krever noe kjennskap til stivheten, k . Regulatorparameterene er av formen :

- $\mathbf{K}_D = k_D \mathbf{I}_{3 \times 3} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$
- $\mathbf{K}_P = k_P \mathbf{I}_{3 \times 3} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$
- $\mathbf{K}_F = k_F \mathbf{I}_{3 \times 3} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$
- $\mathbf{K}_I = k_I \mathbf{I}_{3 \times 3} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$

3.3.2 Stasjonære tilstander

Ettersom \mathbf{K} er en projeksjon inn i $\mathcal{R}(\mathbf{K})$ vil kontaktkraften, \mathbf{f} , alltid ligge i $\mathcal{R}(\mathbf{K})$. Den eneste muligheten for å få null avvik i kraft er derfor å velge $\mathbf{f}_d \in \mathcal{R}(\mathbf{K})$.

Vi skjønner nå at vi kan ha null avvik i posisjon kun i planet utspent av \mathbf{p}_1 og \mathbf{p}_2 , mens komponenten i retningen \mathbf{n} brukes til å oppnå ønsket kraft. Det er derfor ikke mulig å ha null avvik i både kraft og posisjon, såfremt ikke $\mathbf{x}_d \in \mathcal{N}(\mathbf{K})$ og $\mathbf{f}_d = \mathbf{0}$.

Påstand 3.3 De stasjonære tilstandene for system (3.1) med regulator (3.23) blir:

$$\mathbf{f}_\infty = \mathbf{K}(\mathbf{x}_\infty - \mathbf{x}_0) = \mathbf{f}_d \quad (3.24)$$

$$\mathbf{x}_\infty = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{f}_d + \mathbf{K}\mathbf{x}_0) + (\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K})\mathbf{x}_d \quad (3.25)$$

Som vi ser betyr dette at vi får et stasjonært avvik i posisjon, mens vi får perfekt regulering i kraft.

Bevis:

Stasjonært har vi at

$$\int_0^{t=\infty} \Delta \mathbf{f} d\sigma$$

er konstant. Dette betyr at

$$\Delta \mathbf{f}_\infty = \mathbf{f}_d - \mathbf{f}_\infty = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{f}_\infty = \mathbf{f}_d \quad (3.26)$$

som beviser ligning (3.24).

Vi har nå :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_d &= \mathbf{K}(\mathbf{x}_\infty - \mathbf{x}_0) \\ \mathbf{K}\mathbf{x}_\infty &= \mathbf{f}_d + \mathbf{K}\mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Premultiplikasjon med \mathbf{K}^{-1} gir

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x}_\infty = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{f}_d + \mathbf{K}\mathbf{x}_0) \quad (3.28)$$

Ifølge påstand 3.2 har vi:

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x}_\infty \in \mathcal{R}(\mathbf{K}) \quad (3.29)$$

Vi ser nå på modellen (3.1) med regulatoren (3.23) under stasjonære forhold, det vil si

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}_\infty)\ddot{\mathbf{x}}_\infty + \mathbf{C}(\mathbf{x}_\infty, \dot{\mathbf{x}}_\infty)\dot{\mathbf{x}}_\infty + \mathbf{g}(\mathbf{x}_\infty) = \mathbf{K}_P\Delta\mathbf{x}_\infty + \mathbf{g}(\mathbf{x}_\infty) + \mathbf{K}'_F\Delta\mathbf{f}_\infty + \mathbf{K}_I \int_0^\infty \Delta\mathbf{f}_\infty d\sigma \quad (3.30)$$

der $\mathbf{K}'_F = \mathbf{K}_F + \mathbf{I}_{3 \times 3}$ og $\dot{\mathbf{x}}_\infty = \ddot{\mathbf{x}}_\infty = \mathbf{0}$. Vi setter inn (3.26) i (3.30), kanselerer tyngden og får:

$$\mathbf{K}_P\Delta\mathbf{x}_\infty + \mathbf{K}k_I \int_0^\infty (\mathbf{x}_\infty - \mathbf{x}_0)d\sigma = \mathbf{0} \quad (3.31)$$

Premultipliserer så (3.31) med $(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K})$ og får:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K})\mathbf{K}_P\Delta\mathbf{x}_\infty = \mathbf{0} \quad (3.32)$$

siden

$$(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K})\mathbf{K}k_I \int_0^\infty (\mathbf{x}_\infty - \mathbf{x}_0)d\sigma = \mathbf{0}_{3 \times 3}. \quad (3.33)$$

Forkorting av \mathbf{K}_P i ligning (3.32) gir oss

$$(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K})\mathbf{x}_\infty = (\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K})\mathbf{x}_d. \quad (3.34)$$

Ifølge påstand 3.2 har vi

$$(\mathbf{I} - \mathbf{K}^- \mathbf{K}) \mathbf{x}_\infty = (\mathbf{I} - \mathbf{K}^- \mathbf{K}) \mathbf{x}_d \in \mathcal{R}(\mathbf{K})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{K}) \quad (3.35)$$

Vi adderer (3.28) og (3.34) og får:

$$\mathbf{K}^- \mathbf{K} \mathbf{x}_\infty + (\mathbf{I} - \mathbf{K}^- \mathbf{K}) \mathbf{x}_\infty = \mathbf{K}^- (\mathbf{f}_d + \mathbf{K} \mathbf{x}_0) + (\mathbf{I} - \mathbf{K}^- \mathbf{K}) \mathbf{x}_d \quad (3.36)$$

Vi stryker like ledd og får til slutt

$$\mathbf{x}_\infty = \mathbf{K}^- (\mathbf{f}_d + \mathbf{K} \mathbf{x}_0) + (\mathbf{I} - \mathbf{K}^- \mathbf{K}) \mathbf{x}_d \in \mathcal{R}(\mathbf{K}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{K}) = \mathbb{R}^3 \quad (3.37)$$

og ligning (3.25) er dermed bevist. ■

3.4 Totalmodell for manipulator/regulator

Vi vil nå bringe systemet bestående av manipulatoremodellen (3.1) og regulatoren (3.23) på formen $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F} \mathbf{z}$ for å analysere stabiliteten.

Vi definerer nå størrelsen:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_\infty - \mathbf{x} \quad (3.38)$$

Siden \mathbf{x}_∞ er konstant har vi

$$\dot{\mathbf{e}} = -\dot{\mathbf{x}} \quad (3.39)$$

Vi trenger nå en del sammenhenger mellom \mathbf{e} og de andre størrelsene for å bygge opp tilstandsrommodellen.

Hvis vi setter (3.25) inn i (3.38) får vi:

$$\mathbf{e} = \mathbf{K}^- (\mathbf{f}_d + \mathbf{K} \mathbf{x}_0) + (\mathbf{I} - \mathbf{K}^- \mathbf{K}) \mathbf{x}_d - \mathbf{x} \quad (3.40)$$

Dette kan omformes til:

$$\mathbf{e} = \mathbf{K}^- \mathbf{f}_d - \mathbf{K}^- \mathbf{f} + (\mathbf{K}^- \mathbf{K} - \mathbf{I}) \mathbf{x} + (\mathbf{I} - \mathbf{K}^- \mathbf{K}) \mathbf{x}_d \quad (3.41)$$

som gir:

$$\mathbf{e} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}^- \mathbf{K}) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{K}^- \Delta \mathbf{f} \quad (3.42)$$

Dette uttrykket kan vi omforme videre:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \Delta \mathbf{x} - \mathbf{K}^- \mathbf{K} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{K}^- \Delta \mathbf{f} \\ \mathbf{e} &= \Delta \mathbf{x} + \mathbf{K}^- (\Delta \mathbf{f} - \mathbf{K} \Delta \mathbf{x}) \\ \mathbf{e} &= \Delta \mathbf{x} + \mathbf{K}^- (-\mathbf{K} \mathbf{x}_d + \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{f}_d - \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{K} \mathbf{x}_0) \\ \mathbf{e} &= \Delta \mathbf{x} + \mathbf{K}^- (\mathbf{f}_d + \mathbf{K} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_d)) \\ \mathbf{e} &= \Delta \mathbf{x} + \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{d} \end{aligned} \quad (3.43)$$

der

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}_P \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{f}_d + \mathbf{K}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_d)) \quad (3.44)$$

Hvis vi ganger ligning (3.42) med $\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}$ får vi følgende sammenheng mellom \mathbf{e} og $\Delta \mathbf{f}$:

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{e} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{f} \quad (3.45)$$

der $\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}) = \mathbf{0}$ fordi \mathbf{K}^{-1} er en refleksiv generalisert invers. (Se definisjon 3.2) Dermed har vi:

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{e} = \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{f} \quad (3.46)$$

Vi setter nå regulatoren (3.23) inn i modellen (3.1) og får ligningen:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}^{-1} \left[-(\mathbf{C} + \mathbf{K}_D) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_F \Delta \mathbf{f} + \mathbf{K}_P \Delta \mathbf{x} + \mathbf{f}_d - \mathbf{f} + \mathbf{K}_I \int_0^T \Delta \mathbf{f} d\sigma \right] \quad (3.47)$$

Vi benytter nå

$$\mathbf{f}_d - \mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{x}_\infty - \mathbf{K} \mathbf{x}_0 - \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{K} \mathbf{x}_0 = \mathbf{K} \mathbf{e} \quad (3.48)$$

og ligning (3.43) og får:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{D}^{-1} [-(\mathbf{C} + \mathbf{K}_D) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_F \Delta \mathbf{f} + \mathbf{K}_P \Delta \mathbf{x} + \mathbf{K} \Delta \mathbf{x} \\ &\quad + \mathbf{K} \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{d} + \mathbf{K}_I \int_0^T \Delta \mathbf{f} d\sigma] \\ \ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{D}^{-1} [-(\mathbf{C} + \mathbf{K}_D) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_F \mathbf{K} (\mathbf{x}_\infty - \mathbf{x}_0) - \mathbf{K}_F \mathbf{K} (\mathbf{x}_\infty - \mathbf{x}) \\ &\quad + \mathbf{K}_P \mathbf{x}_d - \mathbf{K}_P \mathbf{x} + \mathbf{K} \mathbf{x}_d - \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{K} \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{d} + \mathbf{K}_I \int_0^T \Delta \mathbf{f} d\sigma] \\ \ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{D}^{-1} [-(\mathbf{C} + \mathbf{K}_D) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_F \mathbf{K} \mathbf{e} + \mathbf{K}_P \mathbf{e} - \mathbf{K}_P \mathbf{x}_\infty + \mathbf{K}_P \mathbf{x}_d \\ &\quad + \mathbf{K} \mathbf{x}_d - \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{K} \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{d} + \mathbf{K}_I \int_0^T \Delta \mathbf{f} d\sigma] \end{aligned} \quad (3.49)$$

Vi legger nå til og trekker fra $\mathbf{K} \mathbf{e}$ og benytter lign (3.43) igjen.

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{D}^{-1} [-(\mathbf{C} + \mathbf{K}_D) \dot{\mathbf{x}} + (k'_F \mathbf{K} + \mathbf{K}_P) \mathbf{e} - \mathbf{K} \mathbf{x}_d + \mathbf{K} \mathbf{x} - \mathbf{K} \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{d} \\ &\quad - \mathbf{K}_P \mathbf{x}_\infty + \mathbf{K}_P \mathbf{x}_d + \mathbf{K} \mathbf{x}_d - \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{K} \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{d} + \mathbf{K}_I \int_0^T \Delta \mathbf{f} d\sigma] \\ \ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{D}^{-1} [-(\mathbf{C} + \mathbf{K}_D) \dot{\mathbf{x}} + (k'_F \mathbf{K} + \mathbf{K}_P) \mathbf{e} + \mathbf{K}_P (\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_\infty) \\ &\quad + \mathbf{K}_I \int_0^T \Delta \mathbf{f} d\sigma] \end{aligned} \quad (3.50)$$

Der

$$k'_F \triangleq k_F + 1 \quad (3.51)$$

Vi ser nå litt nærmere på leddet $\mathbf{K}_P (\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_\infty)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_P (\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_\infty) &= \mathbf{K}_P (\mathbf{x}_d - \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{f}_d + \mathbf{K} \mathbf{x}_0) - (\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}) \mathbf{x}_d) \\ &= \mathbf{K}_P (-\mathbf{K}^{-1} (\mathbf{f}_d + \mathbf{K} \mathbf{x}_0) + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{x}_d) \\ &= -\mathbf{K}_P \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{f}_d + \mathbf{K} \mathbf{x}_0 - \mathbf{K} \mathbf{x}_d) \\ &= -\mathbf{K}_P \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{f}_d + \mathbf{K} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_d)) \\ &= -\mathbf{d} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Vi har altså fått en ny ligning for \mathbf{d} :

$$\mathbf{d} = -\mathbf{K}_P(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_\infty) \quad (3.53)$$

Vi ser av ligning (3.44) at $\mathbf{d} \in \mathcal{R}(\mathbf{K})$ og vi kan derfor skrive :

$$\mathbf{d} = \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{d} = \mathbf{K}\mathbf{K}^{-1} \mathbf{d} \quad (3.54)$$

som følger av påstand 3.2. Ved hjelp av samme resonnement har vi:

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{f} \quad (3.55)$$

Vi setter så inn dette i lign (3.50) og får:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}^{-1} \left[-(\mathbf{C} + \mathbf{K}_D)\dot{\mathbf{x}} + (k'_F \mathbf{K} + \mathbf{K}_P)\mathbf{e} - \mathbf{K}\mathbf{K}^{-1} \mathbf{d} + \mathbf{K}_I \int_0^T \mathbf{K}\mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{f} d\sigma \right] \quad (3.56)$$

Vi definerer nå en ny skalar tilstand s som inneholder integraldelen av regulatoren:

$$s = \mathbf{n}^T \left(\int_0^T \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{f} d\sigma - \mathbf{K}_I^{-1} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{d} \right) \quad (3.57)$$

$$\dot{s} = \mathbf{n}^T (\mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{f}) = \mathbf{n}^T \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{f} = \mathbf{n}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{e} = \mathbf{n}^T \mathbf{e} \quad (3.58)$$

Ligningene (3.39), (3.56) og (3.58) beskriver nå det totale systemet:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{C} + k_D \mathbf{I})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}^{-1}(k_P \mathbf{I} + k'_F k \mathbf{n}\mathbf{n}^T)\mathbf{e} + k_I \mathbf{D}^{-1} k \mathbf{n} s \\ \dot{\mathbf{e}} &= -\dot{\mathbf{x}} \\ \dot{s} &= \mathbf{n}^T \mathbf{e} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Vi definerer nå den 7-dimensjonale tilstadsvektoren \mathbf{z} :

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \\ s \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

slik at systemet kan skrives på formen:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{C} + k_D \mathbf{I}) & \mathbf{D}^{-1}(k_P \mathbf{I} + k'_F k \mathbf{n}\mathbf{n}^T) & k_I \mathbf{D}^{-1} k \mathbf{n} \\ -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \\ s \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}\mathbf{z} \quad (3.62)$$

Dette systemet skal vi studere stabiliteten av i kapittel 4.

Kapittel 4

Stabilitetsanalyse i 3 DOF

4.1 Valg av LFK

For å vise asymptotisk stabilitet av system (3.62) bruker vi Lyapunovs metode. [Chiaverini og Siciliano 1991] foreslår en energibasert Lyapunovfunksjonskandidat (LFK) av formen:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z} \quad (4.1)$$

hvor

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & -\rho \mathbf{D} & \mathbf{0}_3 \\ -\rho \mathbf{D} & (k_P + \rho k_D) \mathbf{I} + k'_F k \mathbf{n} \mathbf{n}^T & k_I k \mathbf{n} \\ \mathbf{0}_3^T & k_I k \mathbf{n}^T & \rho k_I k \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \\ s \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

ρ er her en vilkårlig positiv konstant.

4.2 Beregning og begrensning av V

Vi vil her finne krav som må stilles til regulatorparametrene for at V skal være positiv definit. Vi spalter opp den kvadratiske formen (4.1) i tre kvadratiske former slik at:

$$V = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D} & -\rho \mathbf{D} \\ -\rho \mathbf{D} & \rho \mathbf{K}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ s \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_F \mathbf{K} & k_I k \mathbf{n} \\ k_I k \mathbf{n}^T & \rho k_I k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ s \end{bmatrix} + \mathbf{e}^T \mathbf{K}_P \mathbf{e} \right\} \quad (4.3)$$

Vi gjør nytte av sammenhengen (3.58) og metoden med diagonalisering av vektmatrisene fra kapittel 2.7 og transformerer (4.3) til:

$$V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} - \rho \mathbf{e} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \rho \mathbf{K}_D - \rho^2 \mathbf{D} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_i} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} - \rho \mathbf{e} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

$$+\frac{k}{2}\begin{bmatrix} \dot{s} + \frac{k_I}{k_F}s \\ s \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} k'_F & 0 \\ 0 & \rho k_I - \frac{k_I^2}{k'_F} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{ii}} \begin{bmatrix} \dot{s} + \frac{k_I}{k_F}s \\ s \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\mathbf{e}^T \mathbf{K}_P \mathbf{e} \quad (4.4)$$

For at V skal være positiv definitt må de tre koeffisientmatrisene i (4.4) være positiv definite. Dette gir oss følgende krav til regulatorparametrene:

- Matrisen \mathbf{A}_i

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\rho \mathbf{K}_D - \rho^2 \mathbf{D}) &> 0 \\ \mathbf{K}_D &> \rho \mathbf{D} \end{aligned} \quad (4.5)$$

- Matrisen \mathbf{A}_{ii}

$$\begin{aligned} k'_F \left(\rho k_I - \frac{k_I^2}{k'_F} \right) &> 0 \\ k'_F &> \frac{1}{\rho} k_I \end{aligned} \quad (4.6)$$

- Matrisen \mathbf{K}_P

$$\mathbf{K}_P > \mathbf{0} \quad (4.7)$$

4.3 Beregning og begrensning av \dot{V}

Vi trenger å se på den tidsderiverte av (6.1) langs løsningsstrajektorer av (3.62).

$$\dot{V} = \mathbf{z}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{z}} + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{z} = \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{F} \mathbf{z} + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{z} \quad (4.8)$$

der

$$\mathbf{P} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{C} + k_D \mathbf{I}) + \rho \mathbf{D} & k_P \mathbf{I} + k'_F k \mathbf{n} \mathbf{n}^T & k_I k \mathbf{n} \\ \rho(\mathbf{C} + k_D \mathbf{I}) - (k_P + \rho k_D) \mathbf{I} - k'_F k \mathbf{n} \mathbf{n}^T & -\rho(k_P \mathbf{I} + k'_F k \mathbf{n} \mathbf{n}^T) + k_I k \mathbf{n} \mathbf{n}^T & -\rho k_I k \mathbf{n} \\ -k_I k \mathbf{n}^T & \rho k_I k \mathbf{n}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

og

$$\dot{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{D}} & -\rho \dot{\mathbf{D}} & \mathbf{0}_3 \\ -\rho \dot{\mathbf{D}} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3^T & \mathbf{0}_3^T & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Ved bruk av påstandene 2.3 og 2.10 kan (4.8) forenkles til:

$$\dot{V} = -\dot{\mathbf{x}}^T (k_D \mathbf{I} - \rho \mathbf{D}) \dot{\mathbf{x}} - \rho \mathbf{e}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{e}^T (\rho k_P \mathbf{I} + (\rho k'_F - k_I) k \mathbf{n} \mathbf{n}^T) \mathbf{e} \quad (4.11)$$

For at vi skal kunne bestemme krav til regulatorparametrene slik at \dot{V} skal bli negativ definit, må vi beregne en øvre begrensning for \dot{V} . Vi antar at initialverdien til feilen \mathbf{e} er øvre begrenset. Altså :

$$\|\mathbf{e}(0)\| \leq \Phi < \infty \quad (4.12)$$

Dessuten benytter vi teorem 2.6, ligning (3.58) og $\lambda_m \mathbf{I}_{3 \times 3} \leq \mathbf{D} \leq \lambda_M \mathbf{I}_{3 \times 3}$. Dette gir oss:

$$\dot{V} \leq - \underbrace{(k_D - \rho\lambda_M - \rho\Phi k_C)}_{a_i} \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - \rho k_D \|\mathbf{e}\|^2 - \underbrace{(\rho k'_F - k_I)}_{a_{ii}} (\dot{s})^2 \quad (4.13)$$

For at \dot{V} skal være negativ semidefinit, må regulatorparametrene oppfylle følgende krav:

- Koeffisienten a_i

$$\begin{aligned} k_D - \rho\lambda_M - \rho\Phi k_C &> 0 \\ k_D &> \rho\lambda_M - \rho\Phi k_C \end{aligned} \quad (4.14)$$

- Koeffisienten a_{ii}

$$\rho k'_F > k_I \quad (4.15)$$

- Koeffisienten ρk_D

$$k_D > 0 \quad (4.16)$$

4.4 Konklusjon

Ved sammenligning av (4.15) og (4.2) ser vi at kravet (4.2) er overflødig. Dessuten er (4.7) og (4.16) oppfylt per antagelse. Vi har også at (4.14) impliserer (4.5). Kravene på regulatorparametrene for at $V > 0$ og $\dot{V} \leq 0$ blir da:

$$\begin{aligned} k_D &> \rho\lambda_M - \rho\Phi \\ \rho k'_F &> k_I \end{aligned} \quad (4.17)$$

Vi må nå ta hensyn til at ligning (4.13) tillater at \dot{V} kan bli lik null. Vi vil nå bruke LaSalle's teorem for å vise at systemet allikevel er asymptotisk stabilt. Vi ser av uttrykket for \dot{V} , lign(4.8) at :

$$\dot{V} \equiv 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{e} \equiv \mathbf{0}, \dot{s} \equiv 0 \quad (4.18)$$

Og dessuten :

$$\dot{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{0} \Rightarrow \ddot{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{0} \quad (4.19)$$

Vi setter dette inn i ligningen:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{C} + k_D \mathbf{I})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}^{-1}(k_P \mathbf{I} + k'_F \mathbf{k} \mathbf{n} \mathbf{n}^T)\mathbf{e} + k_I \mathbf{D}^{-1} \mathbf{k} \mathbf{n} s \quad (4.20)$$

og får:

$$s \equiv 0 \quad (4.21)$$

Totalt gir dette:

$$\dot{V} \equiv 0 \Rightarrow \mathbf{z} \equiv \mathbf{0} \quad (4.22)$$

Vi har nå at

$$\dot{V} < 0 \quad \forall \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \quad (4.23)$$

Konklusjonen blir da at systemet er asymptotisk stabilt under betingelsene (4.17) ifølge LaSalles teorem.

Kapittel 5

Parallel Kraft/posisjonsstyring i 6 DOF

5.1 Dynamisk robotmodell

Manipulatoren som skal studeres her er av generell type med seks ledd. Vi gjør ingen antagelser om robotens struktur, det vil si antall rotasjonsledd eller translasjonsledd.

Vi definerer følgende koordinatsystemer:

- Basesystem: I
- Gripersystem: B

Vi transformerer robotens dynamiske modell i leddkoordinater (se for eksempel [Spong og Vidyasagar 1989]) til oppgavekoordinater ved hjelp av metoden i kapittel 2.5. Manipulatorens dynamiske modell gitt i oppgavekoordinater (system I) er da gitt av følgende ligning:

$$D(\mathbf{T})^I \dot{\boldsymbol{\nu}} + C(\mathbf{T}, {}^I \boldsymbol{\nu})^I \boldsymbol{\nu} + {}^I \mathbf{g}(\mathbf{T}) = {}^I \mathbf{u} - {}^I \mathbf{w} \quad (5.1)$$

der

- $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^I \mathbf{R}_I^B & {}^I \mathbf{p}_I^B \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$ beskriver griperens orientering og posisjon.
- $D(\mathbf{T}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ er manipulatorens treghetsmatrise.
- $C(\mathbf{T}, {}^I \boldsymbol{\nu}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ er en matrise av sentripetal- og coriolis-ledd.
- ${}^I \mathbf{g}(\mathbf{T}) \in \mathbb{R}^6$ er en vektor av tyngde-krefter og -momenter.
- ${}^I \mathbf{w} \in se^*(3)$ er kontektwrenchen.
- ${}^I \mathbf{u} \in \mathbb{R}^6$ er pådrag fra regulatoren.

${}^I\boldsymbol{\nu}$ er gitt av:

$$\dot{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}({}^I\boldsymbol{\omega}_{B/I}) & {}^I\mathbf{v}_B \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{T}$$

$${}^I\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} {}^I\boldsymbol{\omega}_{B/I} \\ {}^I\mathbf{v}_B \end{bmatrix} \in se(3)$$

Vi gjør følgende forenklinger i notasjon:

- $\mathbf{R} \triangleq {}^I\mathbf{R}_I^B$
- $\mathbf{p} \triangleq {}^I\mathbf{p}_I^B$
- $\boldsymbol{\omega} \triangleq {}^I\boldsymbol{\omega}_{B/I}$
- $\mathbf{v} \triangleq {}^I\mathbf{v}_B$
- $\boldsymbol{\nu} \triangleq {}^I\boldsymbol{\nu}$

5.2 Modell av kontaktkraft

Som vist i kapittel 2.3.4 deler vi griperens hastighetsskrue i en fri del og en kontakt-del:

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}_{fri} + \boldsymbol{\nu}_{comp} \quad (5.2)$$

der $\boldsymbol{\nu}_{fri}$ og $\boldsymbol{\nu}_{comp}$ er som gitt i ligning (2.115).

Vi definerer så en inkrementell forflytning av griperen ved skruen x_Δ . På koordinatform får vi:

$$\mathbf{x}_\Delta \triangleq {}^I\mathbf{x}_\Delta = \begin{bmatrix} {}^I\boldsymbol{\delta} \\ {}^I\mathbf{d} \end{bmatrix} \in se(3)$$

På samme måte som for hastighetsskruen deler vi \mathbf{x}_Δ i to komponenter:

$$\mathbf{x}_\Delta = \mathbf{x}_{\Delta,fri} + \mathbf{x}_{\Delta,comp} \quad (5.3)$$

Der $\mathbf{x}_{\Delta,comp}$ antas å ligge i $se(3)$. Vi har nå ifølge [DeShutter og Bruyninckx 1992] at

$$\dot{\mathbf{x}}_\Delta = \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_{omg}$$

der $\boldsymbol{\nu}_{omg}$ er twisten til omgivelsene. Vi antar som i [DeShutter og Bruyninckx 1992] at

$$\boldsymbol{\nu}_{omg} \equiv \mathbf{0}_6. \quad (5.4)$$

Dette gir oss:

$$\dot{\mathbf{x}}_\Delta = \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}_{fri} + \boldsymbol{\nu}_{comp} = \dot{\mathbf{x}}_{\Delta,fri} + \dot{\mathbf{x}}_{\Delta,comp} \quad (5.5)$$

Ifølge teorien i kapittel 2.3.1 mappes kontakttwisten $\mathbf{x}_{\Delta,comp}$ til en kontaktwrench av stivhetsoperatoren. Eller på koordinatform:

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{K}\mathbf{x}_{\Delta,comp} \quad (5.6)$$

der $\boldsymbol{\Delta}$ og \mathbf{K} er definert i kapittel 2.3.1

5.3 Regulator

5.3.1 PID-regulator

Vi vil nå foreslå en regulator for systemet (5.1) etter mønster av regulatoren for et tilsvarende system i tre frihetsgrader presentert i [Chiaverini og Siciliano 1991] og [Chiaverini, Siciliano og Villani 1992]. Referansene systemet skal følge er:

$$\begin{aligned} \text{Konfigurasjon} & : \mathbf{T}_d = \begin{bmatrix} {}^I \mathbf{R}_{I,d}^B & {}^I \mathbf{p}_{I,d}^B \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in SE(3) \\ \text{Wrench} & : \mathbf{w}_d = \begin{bmatrix} {}^I \mathbf{f}_d \\ {}^I \mathbf{m}_d \end{bmatrix} \in se^*(3) \end{aligned}$$

Det vil si at manipulatorene skal følge konstante referanser for griper-posisjon og -orientering og konstante referanser for kontakt-kraft og -moment. Forenkling av notasjon:

$$\mathbf{R}_d \triangleq {}^I \mathbf{R}_{I,d}^B, \quad \mathbf{p}_d \triangleq {}^I \mathbf{p}_{I,d}^B, \quad \mathbf{f}_d \triangleq {}^I \mathbf{f}_d, \quad \mathbf{m}_d \triangleq {}^I \mathbf{m}_d$$

Vi definerer følgende reguleringsavvik:

- Posisjon:

$$\tilde{\mathbf{p}} \triangleq \mathbf{p}_d - \mathbf{p} \quad (5.7)$$

- Orientering:

$$\tilde{\mathbf{R}} \triangleq \mathbf{R}_d^T \mathbf{R} \quad (5.8)$$

- Wrench:

$$\tilde{\mathbf{w}} \triangleq \mathbf{w}_d - \mathbf{w} \quad (5.9)$$

Når det gjelder orienteringsavviket ser vi at $\mathbf{R}_d = \mathbf{R} \Rightarrow \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$. Vi trenger en parametrisering av orienteringsavviket for bruk i en tilbakekobling i regulatoren og velger da å parametrisere med Eulerparametre (se kap 2.2.1):

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\eta,\epsilon} \quad \text{og} \quad \mathbf{R}_d = \mathbf{R}_{\eta_d,\epsilon_d} \quad (5.10)$$

Orienteringsavviket, $\tilde{\mathbf{R}}$, kan da parametriseres som:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_d^T \mathbf{R} = \mathbf{R}_{\eta_d,-\epsilon_d} \mathbf{R}_{\eta,\epsilon} = \mathbf{R}_{\tilde{\eta},\tilde{\epsilon}} \quad (5.11)$$

Vi bruker formelen for sammensatte rotasjoner, se kapittel 2.2.2, og får følgende uttrykk for $\tilde{\eta}$ og $\tilde{\epsilon}$:

$$\tilde{\eta} = \eta_d \eta + \epsilon_d^T \epsilon \quad (5.12)$$

$$\tilde{\epsilon} = \eta_d \epsilon - \eta \epsilon_d - \mathbf{S}(\epsilon_d) \epsilon \quad (5.13)$$

Vi trenger nå et mål på avviket i konfigurasjon¹ og velger å definere dette som:

$$\mathbf{d}_T \triangleq \begin{bmatrix} -\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Der de forskjellige fortegnene har sitt opphav i regulatorene for posisjon og orientering i henholdsvis kapittel 2.8.1 og kapittel 2.8.2. Regulatoren er av type parallell wrench/konfigurasjon med PD-virkning på konfigurasjon og PI-virkning på wrench. Dessuten benytter vi foroverkobling fra wrenchreferanse og antatt perfekt tyngdekraftkompensasjon. Regulatoren har følgende form:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_D \boldsymbol{\nu} + \mathbf{K}_P \mathbf{d}_T + \mathbf{w}_d + \mathbf{g}(\mathbf{T}) + \mathbf{K}_F \tilde{\mathbf{w}} + \mathbf{K}_I \int_0^t \tilde{\mathbf{w}}(\sigma) d\sigma \quad (5.15)$$

der regulatorparameterene er gitt på følgende form:

- $\mathbf{K}_D \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, $\mathbf{K}_D = \text{diag}\{\mathbf{K}_{DR}, \mathbf{K}_{DP}\}$
 $\mathbf{K}_{DR}, \mathbf{K}_{DP} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, der $\mathbf{K}_{DR} = k_{DR} \mathbf{I}_{3 \times 3}$, $\mathbf{K}_{DP} = k_{DP} \mathbf{I}_{3 \times 3}$
- $\mathbf{K}_P \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, $\mathbf{K}_P = \text{diag}\{\mathbf{K}_{PR}, \mathbf{K}_{PP}\}$
 $\mathbf{K}_{PR}, \mathbf{K}_{PP} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, der $\mathbf{K}_{PR} = k_{PR} \mathbf{I}_{3 \times 3}$, $\mathbf{K}_{PP} = k_{PP} \mathbf{I}_{3 \times 3}$
- $\mathbf{K}_F \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, $\mathbf{K}_F = \text{diag}\{\mathbf{K}_{FR}, \mathbf{K}_{FP}\}$
 $\mathbf{K}_{FR}, \mathbf{K}_{FP} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, der $\mathbf{K}_{FR} = k_{FR} \mathbf{I}_{3 \times 3}$, $\mathbf{K}_{FP} = k_{FP} \mathbf{I}_{3 \times 3}$
- $\mathbf{K}_I \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, $\mathbf{K}_I = \text{diag}\{\mathbf{K}_{IR}, \mathbf{K}_{IP}\}$
 $\mathbf{K}_{IR}, \mathbf{K}_{IP} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, der $\mathbf{K}_{IR} = k_{IR} \mathbf{I}_{3 \times 3}$, $\mathbf{K}_{IP} = k_{IP} \mathbf{I}_{3 \times 3}$

(5.16)

Det er viktig å legge merke til at regulatoren (5.15) ikke krever noe eksakt kunnskap om stivhetsmatrisen, \mathbf{K} , og heller ingen informasjon om typen (punkt, linje eller flate) av kontakt, det vil si twistjacobimatrisen \mathbf{J} . Dette er meget gunstige egenskaper ved regulatoren hvis manipulatorene skulle støte inn i uforutsette og ukjente hindringer.

5.3.2 Stasjonære tilstander

I likevekt vil systemet (5.1) med regulator (5.15) nå en stasjonær konfigurasjon $\mathbf{T}_\infty \neq \mathbf{T}_d$ slik som tilfellet er med posisjonen i parallell kraft/posisjonsstyring i 3 frihetsgrader. I likevekt har vi at

$$\int_0^\infty \tilde{\mathbf{w}}(\sigma)_\infty d\sigma \quad (5.17)$$

er konstant. Dette gir

$$\tilde{\mathbf{w}}_\infty = \mathbf{0}_6 \Rightarrow \mathbf{w}_\infty = \mathbf{w}_d \quad (5.18)$$

¹posisjon og orientering

som betyr at vi ikke får avvik i wrench. I likevekt vil systemet (5.1) med regulator (5.15) oppfylle

$$D(\mathbf{T}_\infty)\dot{\boldsymbol{\nu}}_\infty + \mathbf{C}(\mathbf{T}_\infty, \boldsymbol{\nu}_\infty)\boldsymbol{\nu}_\infty + \mathbf{g}(\mathbf{T}_\infty) = \mathbf{K}_P \mathbf{d}_{T,\infty} + \mathbf{K}'_F \tilde{\boldsymbol{w}}_\infty + \mathbf{K}_I \int_0^\infty \tilde{\boldsymbol{w}}(\sigma)_\infty d\sigma + \mathbf{g}(\mathbf{T}_\infty) \quad (5.19)$$

der $\mathbf{K}'_F = \mathbf{K}_F + \mathbf{I}_{6 \times 6}$ og $\dot{\boldsymbol{\nu}}_\infty = \boldsymbol{\nu}_\infty = \mathbf{0}_6$. Bruk av ligning (5.18) gir oss

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_P \mathbf{d}_{T,\infty} &= -\mathbf{K}_I \int_0^\infty \tilde{\boldsymbol{w}}(\sigma) d\sigma \\ &\Downarrow \\ \begin{bmatrix} -\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_\infty \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_\infty \end{bmatrix} &= -\mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{K}_I \boldsymbol{\Delta} \mathbf{K} \int_0^\infty \mathbf{e}(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (5.20)$$

der

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_\infty \text{ er Eulerparametervektoren til rotasjonsmatrisen } \mathbf{R}_d^T \mathbf{R}_\infty \quad (5.21)$$

og

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_\infty = \mathbf{p}_d - \mathbf{p}_\infty. \quad (5.22)$$

Vi har at

$$(\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K})^\dagger_K (\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K}) \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \quad (5.23)$$

$$\left(\mathbf{I}_{6 \times 6} - (\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K})^\dagger_K (\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K}) \right) \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \quad (5.24)$$

der $\mathcal{N}(\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K})^\perp$ fordi $\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K}$ er symmetrisk. Ved å formultiplisere (5.20) med $\left(\mathbf{I}_{6 \times 6} - (\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K})^\dagger_K (\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K}) \right)$ får vi

$$\left(\mathbf{I}_{6 \times 6} - (\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K})^\dagger_K (\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K}) \right) \mathbf{K}_P \begin{bmatrix} -\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_\infty \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_\infty \end{bmatrix} = \mathbf{0}_6 \quad (5.25)$$

siden $\left(\mathbf{I}_{6 \times 6} - (\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K})^\dagger_K (\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K}) \right) \boldsymbol{\Delta} \mathbf{K} = \mathbf{0}_{6 \times 6}$. Dette gir oss

$$\left(\mathbf{I}_{6 \times 6} - (\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K})^\dagger_K (\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K}) \right) \begin{bmatrix} -\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_\infty \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_\infty \end{bmatrix} = \left(\mathbf{I}_{6 \times 6} - (\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K})^\dagger_K (\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K}) \right) \begin{bmatrix} \mathbf{0}_6 \\ \mathbf{p}_d \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

som betyr at vi som i 3DOF får null avvik i posisjon i $\mathcal{N}(\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K})$, men at vi må regne med et avvik i posisjon i $\mathcal{R}(\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K})$.

Vi legger merke til at avviket (5.20) er invers proporsjonalt med \mathbf{K}_P som betyr at høyere proporsjonalførsterkning gir mindre avvik i konfigurasjon. Vi definerer nå :

$$\mathbf{T}_\infty \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\infty & \mathbf{p}_\infty \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

som er den stasjonære konfigurasjonen manipulatoren vil oppnå.

Avvikene fra den stasjonære konfigurasjonene definerer vi som:

$$\hat{\mathbf{R}} \triangleq \mathbf{R}_\infty^\top \mathbf{R} \quad (5.28)$$

$$\hat{\mathbf{p}} \triangleq \mathbf{p}_\infty - \mathbf{p} \quad (5.29)$$

Som for $\tilde{\mathbf{R}}$ vil vi nå parametrisere $\hat{\mathbf{R}}$:

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_\infty^\top \mathbf{R} = \mathbf{R}_{\eta_\infty, -\epsilon_\infty} \mathbf{R}_{\eta, \epsilon} = \mathbf{R}_{\hat{\eta}, \hat{\epsilon}} \quad (5.30)$$

der

$$\hat{\eta} = \eta_\infty \eta + \boldsymbol{\epsilon}_\infty^\top \boldsymbol{\epsilon} \quad (5.31)$$

$$\hat{\epsilon} = \eta_\infty \boldsymbol{\epsilon} - \eta \boldsymbol{\epsilon}_\infty - \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_\infty) \boldsymbol{\epsilon} \quad (5.32)$$

Siden vi i regulatoren (5.15) kobler tilbake fra $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$, ønsker vi å uttrykke $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ ved $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ og konstantene $\eta_d, \eta_\infty, \boldsymbol{\epsilon}_d$ og $\boldsymbol{\epsilon}_\infty$.

Teorem 5.1 $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ kan skrives som en lineær kombinasjon av $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ og $\hat{\eta}$ på formen

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{h} \hat{\eta} \quad (5.33)$$

der

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}(\eta_d, \eta_\infty, \boldsymbol{\epsilon}_d, \boldsymbol{\epsilon}_\infty) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \\ \mathbf{h} &= \mathbf{h}(\eta_d, \eta_\infty, \boldsymbol{\epsilon}_d, \boldsymbol{\epsilon}_\infty) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (5.34)$$

■

Bevis:

Vi kombinerer ligning (5.11) og (5.30) og får:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_d^\top \mathbf{R}_\infty \hat{\mathbf{R}} \quad (5.35)$$

Vi vil nå bruke formelen for sammensatte rotasjoner to ganger for å utlede et nytt uttrykk for $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$:

Innfører en hjelpestørelse, \mathbf{R}_1 , definert ved:

$$\mathbf{R}_1 \triangleq \mathbf{R}_d^\top \mathbf{R}_\infty = \mathbf{R}_{\eta_1, \epsilon_1} \implies \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{R}}$$

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_{\eta_d, -\epsilon_d} \mathbf{R}_{\eta_\infty, \epsilon_\infty}$$

Vi får følgende uttrykk for η_1 og ϵ_1 :

$$\eta_1 = \eta_d \eta_\infty + \boldsymbol{\epsilon}_d^\top \boldsymbol{\epsilon}_\infty \quad (5.36)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = \eta_d \boldsymbol{\epsilon}_\infty - \eta_\infty \boldsymbol{\epsilon}_d - \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) \boldsymbol{\epsilon}_\infty \quad (5.37)$$

Bruk av formelen for sammensatte rotasjoner en gang til gir:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{R}} \implies \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \eta_1 \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \hat{\eta} \boldsymbol{\epsilon}_1 + \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_1) \hat{\boldsymbol{\epsilon}}$$

Faktoreriserer:

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = [\eta_1 \mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_1)] \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{\epsilon}_1 \hat{\boldsymbol{\eta}} \quad (5.38)$$

Vi setter nå inn (5.36) og (5.37) i (5.38) og får:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} &= [\eta_d \eta_\infty \mathbf{I}_{3 \times 3} + \boldsymbol{\epsilon}_d^T \boldsymbol{\epsilon}_\infty \mathbf{I}_{3 \times 3} + \eta_d \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_\infty) - \eta_\infty \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) - \mathbf{S}(\mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) \boldsymbol{\epsilon}_\infty)] \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ &\quad + [\eta_d \boldsymbol{\epsilon}_\infty - \eta_\infty \boldsymbol{\epsilon}_d - \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) \boldsymbol{\epsilon}_\infty] \hat{\boldsymbol{\eta}} \end{aligned}$$

Bruker så sammenhengene: $\mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{b}) = \mathbf{b}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}\mathbf{b}^T \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ og får:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} &= [\eta_d \eta_\infty \mathbf{I}_{3 \times 3} + \boldsymbol{\epsilon}_d^T \boldsymbol{\epsilon}_\infty \mathbf{I}_{3 \times 3} + \eta_d \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_\infty) - \eta_\infty \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) - \boldsymbol{\epsilon}_\infty \boldsymbol{\epsilon}_d^T + \boldsymbol{\epsilon}_d \boldsymbol{\epsilon}_\infty^T] \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ &\quad + [\eta_d \boldsymbol{\epsilon}_\infty - \eta_\infty \boldsymbol{\epsilon}_d - \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) \boldsymbol{\epsilon}_\infty] \hat{\boldsymbol{\eta}} \end{aligned}$$

Bruker $\mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{S}(\mathbf{b}) = \mathbf{b}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}^T \mathbf{b} \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} &= [\eta_d \eta_\infty \mathbf{I}_{3 \times 3} + \eta_d \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_\infty) - \eta_\infty \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) + \boldsymbol{\epsilon}_d \boldsymbol{\epsilon}_\infty^T - \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_\infty)] \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ &\quad + [\eta_d \boldsymbol{\epsilon}_\infty - \eta_\infty \boldsymbol{\epsilon}_d - \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) \boldsymbol{\epsilon}_\infty] \hat{\boldsymbol{\eta}} \\ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} &= [\eta_d \eta_\infty \mathbf{I}_{3 \times 3} + \eta_d \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_\infty) - \eta_\infty \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) + \boldsymbol{\epsilon}_d^T \boldsymbol{\epsilon}_\infty \mathbf{I}_{3 \times 3}] \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ &\quad + [\eta_d \boldsymbol{\epsilon}_\infty - \eta_\infty \boldsymbol{\epsilon}_d - \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) \boldsymbol{\epsilon}_\infty] \hat{\boldsymbol{\eta}} \end{aligned}$$

Vi definerer nå de *konstante* størrelsene $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ og $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{E} \triangleq \eta_d \eta_\infty \mathbf{I}_{3 \times 3} + \eta_d \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_\infty) - \eta_\infty \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) + \boldsymbol{\epsilon}_d^T \boldsymbol{\epsilon}_\infty \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (5.39)$$

$$\mathbf{h} \triangleq \eta_d \boldsymbol{\epsilon}_\infty - \eta_\infty \boldsymbol{\epsilon}_d - \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) \boldsymbol{\epsilon}_\infty \quad (5.40)$$

slik at vi kan skrive:

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{h} \hat{\boldsymbol{\eta}} \quad (5.41)$$

■

Vi legger her merke til at ligningen for \mathbf{h} er identisk med ligningen for en sammensatt rotasjon (se kapittel 2.2.2). \mathbf{h} er derfor en eulerparametervektor, og dette gir:

$$\|\mathbf{h}\| \leq 1 \quad (5.42)$$

Beregning av $\|\mathbf{E}\|$ er gjort i Appendix A. Disse størrelsene vil bli brukt i stabilitetsbevis senere. Ved perfekt regulering i orientering, det vil si $\mathbf{R}_\infty = \mathbf{R}_d$, får vi $\eta_d = \eta_\infty$ og $\boldsymbol{\epsilon}_d = \boldsymbol{\epsilon}_\infty$ og vi ser av ligningene (5.39) og (5.40) at

$$\mathbf{R}_\infty = \mathbf{R}_d \Leftrightarrow \mathbf{E} = \mathbf{I}_{3 \times 3} \text{ og } \mathbf{h} = \mathbf{0}_3 \quad (5.43)$$

slik at

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (5.44)$$

Vi vil nå også uttrykke $\tilde{\mathbf{p}}$ ved $\hat{\mathbf{p}}$ og konstantene \mathbf{p}_∞ og \mathbf{p}_d . Kombinasjon av ligningene (5.7) og (5.29) gir:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_d - \mathbf{p}_\infty + \hat{\mathbf{p}} \quad (5.45)$$

Vi får nå et nytt uttrykk for \mathbf{d}_T :

$$\mathbf{d}_T = \begin{bmatrix} -\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{h} \hat{\boldsymbol{\eta}} \\ \mathbf{p}_d - \mathbf{p}_\infty + \hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

5.4 Totalmodell for manipulator/regulator

Vi vil nå bringe systemet bestående av manipulatoremodellen (5.1) og regulatoroen (5.15) på formen $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}\mathbf{z}$ som i kapittel 3, med henblikk på stabilitetsanalyse. Vi innfører notasjonen:

- $\mathbf{0}_{n \times m} \triangleq$ nullmatrise $\in \mathbb{R}^{n \times m}$
- $\mathbf{0}_n \triangleq$ nullvektor $\in \mathbb{R}^n$.

Vi setter inn (5.15) i (5.1) og får:

$$\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}\boldsymbol{\nu} + \mathbf{g} = -\mathbf{K}_D\boldsymbol{\nu} + \mathbf{K}_P\mathbf{d}_T + \mathbf{w}_d + \mathbf{g} + \mathbf{K}_F\tilde{\mathbf{w}} + \mathbf{K}_I \int_0^t \tilde{\mathbf{w}}d\sigma - \mathbf{w}$$

\mathbf{D} er positiv definit og kan derfor inverteres. Tyngden \mathbf{g} kanseleres og vi får:

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{D}^{-1} \left\{ -(\mathbf{C} + \mathbf{K}_D)\boldsymbol{\nu} + \mathbf{K}_P\mathbf{d}_T + \mathbf{K}_F\tilde{\mathbf{w}} + (\mathbf{w}_d - \mathbf{w}) + \mathbf{K}_I \int_0^t \tilde{\mathbf{w}}d\sigma \right\} \quad (5.47)$$

Vi bruker (5.46) og regner ut leddet $\mathbf{K}_P\mathbf{d}_T$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_P\mathbf{d}_T &= \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{PR}(\mathbf{E}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{h}\hat{\boldsymbol{\eta}}) \\ \mathbf{K}_{PP}(\mathbf{p}_d - \mathbf{p}_\infty + \hat{\mathbf{p}}) \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_P\mathbf{d}_T &= \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{PR}\mathbf{E} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{PR}\mathbf{h} \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\eta}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{K}_{PP} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{K}_{PP}(\mathbf{p}_d - \mathbf{p}_\infty) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Vi definerer:

$$\mathbf{K}'_F \triangleq \mathbf{K}_F + \mathbf{I}_{6 \times 6} \quad (5.49)$$

og setter inn (5.48) i (5.47) som gir:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\nu}} &= \mathbf{D}^{-1} \left\{ -(\mathbf{C} + \mathbf{K}_D)\boldsymbol{\nu} + \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{PR}\mathbf{E} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{PR}\mathbf{h} \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\eta}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{K}_{PP} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{K}_{PP}(\mathbf{p}_d - \mathbf{p}_\infty) \end{bmatrix} + \mathbf{K}'_F\tilde{\mathbf{w}} + \mathbf{K}_I \int_0^t \tilde{\mathbf{w}}d\sigma \right\} \end{aligned} \quad (5.50)$$

Vi ønsker nå å bringe dette systemet på en form $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}\mathbf{z}$ slik at vi kan studere likevekten om origo, $\mathbf{z} = \mathbf{o}$. Vi velger fortegnet på $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ slik at:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_\infty \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\eta}} = 1, \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{0}_3 \quad (5.51)$$

Vi definerer nå vektoren $\mathbf{d}(\hat{\boldsymbol{\eta}}) \in \mathbb{R}^6$ ved:

$$\mathbf{d}(\hat{\boldsymbol{\eta}}) \triangleq - \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{PR}\mathbf{h}\hat{\boldsymbol{\eta}} \\ \mathbf{K}_{PP}(\mathbf{p}_d - \mathbf{p}_\infty) \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

som er en generalisering av den samme størrelsen i det tredimensjonale tilfellet, se ligning (3.53). Denne vektoren er knyttet til avviket fra ønsket konfigurasjon. Vi definerer også den inkrementelle forflytningsskruen \mathbf{e} ved sammenhengen:

$$\tilde{\mathbf{w}} \triangleq \mathbf{\Delta K e}, \mathbf{e} \in se(3) \Rightarrow \tilde{\mathbf{w}} \in se^*(3) \quad (5.53)$$

\mathbf{e} er altså den forflytningen som avbildes til avviket i wrench. \mathbf{e} er gitt av:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_{\Delta,comp}^d - \mathbf{x}_{\Delta,comp} \quad (5.54)$$

der $\mathbf{x}_{\Delta,comp}^d \in se(3)$ er en konstant forflytningsskrue definert ved sammenhengen:

$$\mathbf{w}_d = \mathbf{\Delta K x}_{\Delta,comp}^d \quad (5.55)$$

$\mathbf{x}_{\Delta,comp}^d$ er altså den forflytningsskruen som avbildes til wrenchreferansen. Vi setter inn (5.52) og (5.53) i (5.50) og får:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\nu}} = & \mathbf{D}^{-1} \left\{ -(\mathbf{C} + \mathbf{K}_D)\boldsymbol{\nu} + \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{PR}\mathbf{E} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{d}(\hat{\eta}) \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{K}_{PP} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_I \int_0^t \tilde{\mathbf{w}} d\sigma + \mathbf{K}'_F \tilde{\mathbf{w}} \right\} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Vi innfører nok en variabel. Denne gang for å ta hånd om integralvirkningen:

$$\mathbf{s} \triangleq \int_0^t \tilde{\mathbf{w}} d\sigma - \mathbf{K}'_I \mathbf{d}(\hat{\eta}) \in \mathbb{R}^6 \quad (5.57)$$

Vi legger merke til at (5.57) er en utvidelse av (3.57), men siden vi ikke har en så enkel struktur på \mathbf{K} her som i Kapittel 3 blir \mathbf{s} en vektor og ikke en skalar. Ligning (5.57) forenkler (5.56) til:

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{D}^{-1} \left\{ -(\mathbf{C} + \mathbf{K}_D)\boldsymbol{\nu} + \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{PR}\mathbf{E} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{K}_{PP} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_I \mathbf{s} + \mathbf{K}'_F \tilde{\mathbf{w}} \right\} \quad (5.58)$$

Vi trenger nå uttrykk for de deriverte av tilstandene $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\hat{\mathbf{p}}$, \mathbf{s} og $\tilde{\mathbf{w}}$. Ifølge kapittel 2.2.3 oppfyller $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ den kinematiske differensialligningen:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}} = \frac{1}{2} [\hat{\eta} \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}})]^I \boldsymbol{\omega}_{B/I} \text{ der } \boldsymbol{\omega}_{B/I} = \boldsymbol{\omega} \quad (5.59)$$

Når det gjelder $\hat{\mathbf{p}}$, så følger også denne tilstanden en kinematisk differensialligning gitt ved:

$$\dot{\hat{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\omega}}) & \hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{0}_3^T & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{T}} \text{ der } \hat{\mathbf{T}} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}} & \hat{\mathbf{p}} \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

Siden \mathbf{R}_∞ og \mathbf{p}_∞ er konstante og $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_\infty - \mathbf{p}$ har vi:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} \quad (5.61)$$

som gitt i ligning (2.69), og

$$\hat{\mathbf{v}} = -\mathbf{v}. \quad (5.62)$$

Dette gir oss følgende kinematiske differensialligning for $\hat{\mathbf{p}}$:

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{v} \quad (5.63)$$

For å finne $\dot{\mathbf{s}}$ deriverer vi ligning (5.57):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= \frac{d}{dt} \int_0^t \tilde{\mathbf{w}} d\sigma - \mathbf{K}_I^{-1} \dot{\mathbf{d}}(\hat{\eta}) \\ \dot{\mathbf{s}} &= \tilde{\mathbf{w}} + \mathbf{K}_I^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{PR} \mathbf{h} \dot{\hat{\eta}} \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{s}} &= \tilde{\mathbf{w}} + \frac{k_{PR}}{2k_{IR}} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{s}} &= \tilde{\mathbf{w}} + \frac{k_{PR}}{2k_{IR}} \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) \boldsymbol{\nu} \quad \text{der} \quad \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{h} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.64)$$

$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ finnes ved derivasjon av ligning (5.54):

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\nu}_{d,comp} - \boldsymbol{\nu}_{comp}$$

Der $\boldsymbol{\nu}_{d,comp} = \mathbf{0}_6$ siden $\mathbf{x}_{\Delta,comp}^d$ er konstant. Dette gir

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = -\boldsymbol{\nu}_{comp}.$$

Vi har fra ligning (2.116) at

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = -\boldsymbol{\nu}_{comp} = -(\mathbf{I}_{6 \times 6} - \mathbf{P}_T) \boldsymbol{\nu} \quad (5.65)$$

og dermed

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}} = -\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K} (\mathbf{I}_{6 \times 6} - \mathbf{P}_T) \boldsymbol{\nu} \quad (5.66)$$

siden $\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K}$ er konstant.

Ligningene (5.58), (5.59), (5.63), (5.64) og (5.65) utgjør nå det totale systemet:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\nu}} &= \mathbf{D}^{-1} \left\{ -(\mathbf{C} + \mathbf{K}_D) \boldsymbol{\nu} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{PR} \mathbf{E} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{K}_{PP} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_I \mathbf{s} + \mathbf{K}'_F \tilde{\mathbf{w}} \right\} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}} &= \frac{1}{2} [\hat{\eta} \mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}})] \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\hat{\mathbf{p}}} &= \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{s}} &= \frac{k_{PR}}{2k_{IR}} \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) \boldsymbol{\nu} + \tilde{\mathbf{w}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{w}}} &= -\boldsymbol{\Delta} \mathbf{K} (\mathbf{I}_{6 \times 6} - \mathbf{P}_T) \boldsymbol{\nu} \end{aligned} \quad (5.67)$$

Systemet kan nå enkelt og greit skrives på matriseform:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}(\mathbf{z}) \mathbf{z} \quad (5.68)$$

der

$$\mathbf{z} \triangleq \left[\boldsymbol{\nu}^T \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T \quad \hat{\mathbf{p}}^T \quad \mathbf{s}^T \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \right]^T \in \mathbb{R}^{24} \quad (5.69)$$

og

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} -D^{-1}(C + K_D) & -D^{-1} \begin{bmatrix} K_{PRE} \\ 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} & D^{-1} \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ K_{PP} \end{bmatrix} & D^{-1}K_I & D^{-1}K'_F \\ \frac{1}{2}[\hat{\eta}I_{3 \times 3} + S(\hat{\epsilon}) \quad 0_{3 \times 3}] & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 6} & 0_{3 \times 6} \\ \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & -I_{3 \times 3} \end{bmatrix} & 0_{3 \times 3} & S(\omega) & 0_{3 \times 6} & 0_{3 \times 6} \\ \frac{k_{PR}}{2k_{IR}}H(\hat{\epsilon}) & 0_{6 \times 3} & 0_{6 \times 3} & 0_{6 \times 6} & I_{6 \times 6} \\ -\Delta K(I_{6 \times 6} - P_T) & 0_{6 \times 3} & 0_{6 \times 3} & 0_{6 \times 6} & 0_{6 \times 6} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{24 \times 24} \quad (5.70)$$

Vi vil fremover bruke notasjonen

$$\mathbf{F} \triangleq \mathbf{F}(\mathbf{z}) \quad (5.71)$$

Dette systemet skal vi studere stabiliteten av i kapittel 6.

Kapittel 6

Stabilitetsanalyse i 6 DOF

6.1 Valg av LFK

For å studere stabiliteten av systemet (5.70) vil vi bruke Lyapunovs metode, og vi må derfor velge en passende Lyapunovfunksjonskandidat (LFK). Vi bruker en energibasert kvadratisk form med kryssledd som beskrevet i kapittel 2.7.

Valget av LFK bygger i utgangspunktet på den LFK som er brukt til å vise asymptotisk stabilitet i [Chiaverini, Siciliano og Villani 1992]. Denne er utvidet for å få med de nye tilstandene vi har innført i forbindelse med utvidelsen til 6 DOF. Dette innebærer blant annet en LFK for Eulerparameterene, se kapittel 2.8.

De ikkediagonale leddene er framkommet ved at vi har søkt å lage negativt definitte kvadratiske ledd i uttrykket for den tidsderiverte av LFK'en.

Utfra disse hensyn har vi kommet frem til at følgende LFK har vist seg nyttig:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z} + (2k_{PR} + \beta k_{DR}) \|\mathbf{E}\| (\hat{\eta} - 1)^2 \quad (6.1)$$

der

$$\mathbf{z} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}^T & \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T & \hat{\boldsymbol{p}}^T & \mathbf{s}^T & \tilde{\boldsymbol{w}}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{24} \quad (6.2)$$

og

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2D & \beta D \begin{bmatrix} E \\ 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} & -\rho D \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix} & -\delta D K_I & 0_{6 \times 6} \\ \beta \begin{bmatrix} E^T & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} D & 2(2K_{PR} + \beta K_{DR}) \|E\| & 0_{3 \times 6} & 0_{6 \times 6} & 0_{6 \times 3} \\ -\rho \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} D & 0_{3 \times 3} & 2K_{PP} + \rho K_{DP} & 0_{6 \times 3} & 0_{6 \times 3} \\ -\delta K_I D & 0_{3 \times 6} & 0_{3 \times 6} & 2\Lambda K_I & -\gamma K_I \\ 0_{6 \times 6} & 0_{3 \times 6} & 0_{3 \times 6} & -\gamma K_I & \gamma^2 K_F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{24 \times 24} \quad (6.3)$$

Der

$$\beta, \gamma, \delta, \rho \in \mathbb{R}^+ \quad (6.4)$$

er fritt valgte og

$$\mathbf{A} \triangleq \text{diag}\{\rho \mathbf{I}_{3 \times 3}, \beta \mathbf{I}_{3 \times 3}\} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}. \quad (6.5)$$

Faktoren 2 i elementene $2\mathbf{D}$ og $2\rho \mathbf{K}_I$ er innført for å forenkle oppdelingen av V i kapittel 6.2.2. 2-tallene har sitt opphav i antall koblinger mellom de aktuelle tilstandene i Lyapunovfunksjonskandidaten.

6.2 Beregning og begrensning av V

Vi vil beregne V på to forskjellige måter. Først etter samme mønster som i [Chiaverini og Siciliano 1991] og [Chiaverini, Siciliano og Villani 1992] og deretter med metoden med diagonalisering av vektmatrisen fra kapittel 2.7.

6.2.1 Beregning og begrensning av V med full vektmatrise

Vi ønsker nå å finne krav til regulatorparameterne for at V skal være positiv definit. Det vil si $V > 0 \forall \mathbf{z} \neq \mathbf{0}_{24}$. Ved å regne ut den kvadratiske formen (6.1) og bruke (5.53) får vi følgende uttrykk:

$$\begin{aligned} V = & \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\nu} - \rho \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T (2\mathbf{K}_{PR} + \beta \mathbf{K}_{DR}) \|\mathbf{E}\| \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{p}}^T (2\mathbf{K}_{PP} + \rho \mathbf{K}_{DP}) \hat{\mathbf{p}} \\ & + \mathbf{s}^T \mathbf{A} \mathbf{K}_I \mathbf{s} + \frac{\gamma^2}{2} \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{K}_F \tilde{\mathbf{w}} - \beta \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} - \delta \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \mathbf{K}_I \mathbf{s} - \gamma \mathbf{s}^T \mathbf{K}_I \tilde{\mathbf{w}} \\ & + (2k_{PR} + \beta k_{DR}) \|\mathbf{E}\| (\hat{\eta} - 1)^2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Vi benytter oss nå av følgende egenskap ved treghetsmatrisen \mathbf{D} :

$$\lambda_m \mathbf{I}_{6 \times 6} \leq \mathbf{D} \leq \lambda_M \mathbf{I}_{6 \times 6} \quad (6.7)$$

(6.7) gir oss to andre ulikheter som vi skal bruke i utstrakt grad utover i stabilitetsbeviset:

$$\mathbf{D} \geq \frac{\mathbf{D}\mathbf{D}}{\lambda_M} \quad \text{og} \quad -\mathbf{D} \leq -\lambda_m \mathbf{I}_{6 \times 6} \quad (6.8)$$

der λ_m og λ_M er henholdsvis minste og største egenverdi til \mathbf{D} . Vi kan nå dele opp og nedrebegrense V ved:

$$\begin{aligned} V \geq & \frac{1}{2\lambda_M} \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \mathbf{D} \boldsymbol{\nu} - \rho \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{p}}^T (2k_{PP} + \rho k_{DP}) \hat{\mathbf{p}} \\ & + \frac{1}{4\lambda_M} \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \mathbf{D} \boldsymbol{\nu} - \beta \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T (2k_{PR} + \beta k_{DR}) \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\lambda_M} \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \mathbf{D} \boldsymbol{\nu} - \delta \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \mathbf{K}_I \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_I \mathbf{s} \\
& + \frac{\gamma^2}{2} \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{K}_F \tilde{\mathbf{w}} - \gamma \mathbf{s}^T \mathbf{K}_I \tilde{\mathbf{w}} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_I \mathbf{s} + (2k_{PR} + \beta k_{DR}) \|\mathbf{E}\| (\hat{\eta} - 1)^2 \quad (6.9)
\end{aligned}$$

Der oppdelingen av $\frac{1}{2\lambda_M} \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \mathbf{D} \boldsymbol{\nu}$ er gjort med henblikk på faktorisering. Dette gjelder også $\frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{K}_I \mathbf{s}$. Vi faktorerer (6.9) til kvadratiske former:

$$\begin{aligned}
V \geq & \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left[\boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \quad \hat{\mathbf{p}}^T \right] \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{I}_{6 \times 6}}{\lambda_M} & \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\rho \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\rho \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} & (2k_{PP} + \rho k_{DP}) \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_i} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \boldsymbol{\nu} \\ \hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \\ & + \left[\boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T \right] \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{I}_{6 \times 6}}{2\lambda_M} & -\beta \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ -\beta \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} & (2k_{PR} + \beta k_{DR}) \|\mathbf{E}\| \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{ii}} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \boldsymbol{\nu} \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix} \\ & + \left[\boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \quad \mathbf{s}^T \right] \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{I}_{6 \times 6}}{2\lambda_M} & -\delta \mathbf{K}_I \\ -\delta \mathbf{K}_I & \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_I \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{iii}} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \boldsymbol{\nu} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \\ & + \left[\mathbf{s}^T \quad \tilde{\mathbf{w}}^T \right] \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_I & -\gamma \mathbf{K}_I \\ -\gamma \mathbf{K}_I & \gamma^2 \mathbf{K}_F \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{iv}} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \tilde{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \\ & + (2k_{PR} + \beta k_{DR}) \|\mathbf{E}\| (\hat{\eta} - 1)^2 \quad (6.10)
\end{aligned}$$

For at V skal være positiv definitt må nå alle koeffisientmatrisene $\mathbf{A}_i \dots \mathbf{A}_{iv}$ i (6.10) være positiv definite. Dessuten må $(2k_{PR} + \beta k_{DR})$ være positiv, men dette er oppfylt per antagelse. Dette gir oss følgende krav til regulatorparameterene og de fritt valgte parameterne i \mathbf{P} :

- Matrise \mathbf{A}_i

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_M} (2k_{PP} + \rho k_{DP}) - \rho^2 & > 0 \\
& \Downarrow \\
2k_{PP} + \rho k_{DP} & > \lambda_M \rho^2 \quad (6.11)
\end{aligned}$$

- Matrise \mathbf{A}_{ii}

$$\left(\frac{1}{2\lambda_M} \right)^2 (2k_{PR} + \beta k_{DR}) \|\mathbf{E}\| \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{\beta^2}{4\lambda_M} \mathbf{E} \mathbf{E}^T > \mathbf{0}_{3 \times 3}$$

$$\begin{aligned}
& \Downarrow \\
2(k_{PR} + \beta k_{DR})\|\mathbf{E}\| &> 2\lambda_M\beta^2\|\mathbf{E}\mathbf{E}^T\| \\
& \Downarrow \\
2k_{PR} + \beta k_{DR} &> 4\lambda_M\beta^2 \tag{6.12}
\end{aligned}$$

Den siste overgangen følger av at $\|\mathbf{E}\| \leq 2$ (Se Appendix A).

- Matrise \mathbf{A}_{iii}

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\lambda_M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{K}_I - \delta^2\mathbf{K}_I^2 &> 0 \\
& \Downarrow \mathbf{K}_I > \mathbf{0}_{6 \times 6} \\
\frac{1}{4\lambda_M}\mathbf{\Lambda} - \delta^2\mathbf{K}_I &> 0 \\
& \Downarrow \\
\mathbf{K}_I &< \frac{1}{4\delta^2\lambda_M}\mathbf{\Lambda} \tag{6.13}
\end{aligned}$$

- Matrise \mathbf{A}_{iv}

$$\begin{aligned}
\gamma^2\lambda\mathbf{K}_I\mathbf{K}_F - \gamma^2\mathbf{K}_I^2 &> 0 \\
& \Downarrow \\
\mathbf{K}_F &> \mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{K}_I \tag{6.14}
\end{aligned}$$

6.2.2 Beregning og begrensning av V med diagonal vektmatrise

Vi skal nå utlede krav til regulatorparameterene for at V skal være positiv definitt når vi bruker metoden med diagonalisering av vektmatrisene. V kan skrives som en sum av 5 kvadratiske former påfølgende måte:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \hat{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D} & -\beta\mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} & -\rho\mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ -\beta \begin{bmatrix} \mathbf{E}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{D} & 2\beta\mathbf{K}_{DR}\|\mathbf{E}\| & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\rho \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \rho\mathbf{K}_{DP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \hat{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} \\
&+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D} & -\delta\mathbf{D}\mathbf{K}_I \\ -\delta\mathbf{K}_I\mathbf{D} & \mathbf{\Lambda}\mathbf{K}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} + 2\|\mathbf{E}\|\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T\mathbf{K}_{PR}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} + (2k_{PR} + \beta k_{DR})\|\mathbf{E}\|(\hat{\eta} - 1)^2 \\
&+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \tilde{\boldsymbol{w}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}\mathbf{K}_I & -\gamma\mathbf{K}_I \\ -\gamma\mathbf{K}_I & \gamma^2\mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \tilde{\boldsymbol{w}} \end{bmatrix} + 2\hat{\boldsymbol{p}}^T\mathbf{K}_{PP}\hat{\boldsymbol{p}} \tag{6.15}
\end{aligned}$$

Vi utfører nå en similaritetstransformasjon på vektmatrisene i (6.15) og får:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6$$

$$\begin{aligned} V = & +\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu} - \delta \mathbf{K}_I \mathbf{s} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_I - \delta^2 \mathbf{K}_I \mathbf{D} \mathbf{K}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu} - \delta \mathbf{K}_I \mathbf{s} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} + 2 \|\mathbf{E}\| \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T \mathbf{K}_{PR} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ & +\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{s} - \gamma \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \tilde{\mathbf{w}} \\ \tilde{\mathbf{w}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_I & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & \gamma^2 (\mathbf{K}_F - \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{K}_I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s} - \gamma \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \tilde{\mathbf{w}} \\ \tilde{\mathbf{w}} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\rho}}^T \mathbf{K}_{PP} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ & + (2k_{PR} + \beta k_{DR}) \|\mathbf{E}\| (\hat{\eta} - 1)^2 \\ & + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu} - \begin{bmatrix} \beta \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \rho \hat{\boldsymbol{\rho}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \hat{\boldsymbol{\rho}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & \begin{bmatrix} 2\|\mathbf{E}\| \beta \mathbf{K}_{DR} - \beta^2 \mathbf{E}^T \mathbf{D}_{11} \mathbf{E} & -\frac{1}{2} \rho \beta \mathbf{E}^T \mathbf{D}_{12} \\ -\frac{1}{2} \rho \beta \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{E} & \rho \mathbf{K}_{DP} - \rho^2 \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu} - \begin{bmatrix} \beta \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \rho \hat{\boldsymbol{\rho}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \hat{\boldsymbol{\rho}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Der $\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{12}^T & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{D}$. Vi regner nå ut kravene til regulatorparametrene:

- $V_1 > 0$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_I - \delta^2 \mathbf{K}_I \mathbf{D} \mathbf{K}_I &> \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ &\Downarrow \\ \delta^2 \mathbf{K}_I \mathbf{D} &< \boldsymbol{\Lambda} \\ &\Downarrow \\ \mathbf{K}_I &< \frac{1}{\delta^2 \lambda_M} \boldsymbol{\Lambda} \end{aligned} \quad (6.17)$$

- $V_2 > 0$

\mathbf{K}_{PR} er positiv definit per antagelse.

- $V_3 > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_F - \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{K}_I &> \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ &\Downarrow \\ \mathbf{K}_I &< \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_F \end{aligned} \quad (6.18)$$

- $V_4 > 0$

\mathbf{K}_{DR} er positiv definit per antagelse.

- $V_5 > 0$

$(2k_{PR} + \beta k_{DR})$ er positiv per antagelse

- $V_6 > 0$

Her får vi to krav:

1.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{DR} &> \beta \mathbf{E}^T \mathbf{D}_{11} \mathbf{E} \\ &\Downarrow \\ k_{DR} &> 4\beta \lambda_M \end{aligned} \quad (6.19)$$

Overgangen følger av at $\mathbf{D}_{11}, \mathbf{D}_{22} \leq \lambda_M \mathbf{I}_{3 \times 3}$ og $\|\mathbf{E}\| \leq 2$

2.

$$\begin{aligned} (2\|\mathbf{E}\|\beta \mathbf{K}_{DR} - \beta^2 \mathbf{E}^T \mathbf{D}_{11} \mathbf{E}) (\rho \mathbf{K}_{DP} - \rho^2 \mathbf{D}_{22}) &> \frac{1}{4} \rho^2 \beta^2 \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{E}^T \mathbf{E} \mathbf{D}_{12} \\ &\Downarrow \\ 2\beta \rho \|\mathbf{E}\| \mathbf{K}_{DR} \mathbf{K}_{DP} - 2\rho^2 \beta \|\mathbf{E}\| \mathbf{K}_{DR} \mathbf{D}_{22} &> \beta^2 \rho \mathbf{E}^T \mathbf{D}_{11} \mathbf{E} \mathbf{K}_{DP} \\ &\Downarrow \\ k_{DR} k_{DP} &> \lambda_M (\beta k_{DP} + \rho k_{DR}) \end{aligned} \quad (6.20)$$

Den siste overgangen følger av at $\mathbf{D}_{11}, \mathbf{D}_{22} \leq \lambda_M \mathbf{I}_{3 \times 3}$ og $\|\mathbf{E}\| \leq 2$. Vi ser at kravet (6.20) impliserer (6.19)

Ved å sammenligne kravene til regulatorparameterene gitt i (6.11)-(6.14) med de gitt i (6.17)-(6.20) ser vi at diagonaliseringen av vektmatrisene har ført til at vi ikke får noen begrensning på forsterkningene i \mathbf{K}_P , slik tilfellet også er for regulatoren i 3DOF.

6.3 Beregning av \dot{V}

Vi skal nå beregne et uttrykk for den tidsderiverte av (6.1) langs systemets løsningsstrajektorer. Bruk av produktregelen for derivasjon gir oss:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{P} \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{z}}) + 2(2k_{PR} + \beta k_{DR}) \|\mathbf{E}\| (\hat{\eta} - 1) \dot{\hat{\eta}} \quad (6.21)$$

Transponering gir oss sammenhengen

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F} \mathbf{z} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{z}}^T = \mathbf{z}^T \mathbf{F}^T \quad (6.22)$$

Innsetning av (6.22) i (6.21) gir:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} (\mathbf{z}^T \mathbf{F}^T \mathbf{P} \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{F} \mathbf{z}) + 2(2k_{PR} + \beta k_{DR}) \|\mathbf{E}\| (\hat{\eta} - 1) \dot{\hat{\eta}}$$

\dot{V} er en skalar. Leddene kan derfor fritt transponeres.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} (\mathbf{z}^T \mathbf{F}^T \mathbf{P} \mathbf{z})^T + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{z} + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{F} \mathbf{z} + 2(2k_{PR} + \beta k_{DR}) \|\mathbf{E}\| (\hat{\eta} - 1) \dot{\hat{\eta}} \\ \dot{V} &= \frac{1}{2} \mathbf{z}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{F}) \mathbf{z} + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{z} + 2(2k_{PR} + \beta k_{DR}) \|\mathbf{E}\| (\hat{\eta} - 1) \dot{\hat{\eta}} \end{aligned} \quad (6.23)$$

der $(\mathbf{P}^T \mathbf{F} + \mathbf{P} \mathbf{F})$ er en symmetrisk matrise. For å redusere beregningsmengden bruker vi det faktum at valget $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ fører til at (6.23) kan forenkles til:

$$\dot{V} = \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{F} \mathbf{z} + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{z} + 2(2k_{PR} + \beta k_{DR}) \|\mathbf{E}\| (\hat{\eta} - 1) \dot{\hat{\eta}} \quad (6.24)$$

slik at vi beregner bare $\mathbf{P} \mathbf{F}$ og ikke $(\mathbf{F}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{F})$. I første omgang skal vi regne ut $\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{z}$ og trenger å beregne $\dot{\mathbf{P}}$. Derivasjon av (6.3) med hensyn på tiden gir:

$$\dot{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 2\dot{\mathbf{D}} & \beta \dot{\mathbf{D}} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} & -\rho \dot{\mathbf{D}} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} & -\delta \dot{\mathbf{D}} \mathbf{K}_I & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \beta [\mathbf{E}^T \mathbf{0}_{3 \times 3}] \dot{\mathbf{D}} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ -\rho [\mathbf{0}_{3 \times 3} \mathbf{I}_{3 \times 3}] \dot{\mathbf{D}} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{6 \times 3} & \mathbf{0}_{6 \times 3} \\ -\delta \mathbf{K}_I \dot{\mathbf{D}} & \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{24 \times 24} \quad (6.25)$$

Vi får nå:

$$\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{z} = \boldsymbol{\nu}^T \dot{\mathbf{D}} \boldsymbol{\nu} + \beta \boldsymbol{\nu}^T \dot{\mathbf{D}} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} - \rho \boldsymbol{\nu}^T \dot{\mathbf{D}} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} - \delta \boldsymbol{\nu}^T \dot{\mathbf{D}} \mathbf{K}_I \mathbf{s} \quad (6.26)$$

Ved hjelp av sammenhengen (2.119) kan vi skrive (6.26) som :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{z} &= \boldsymbol{\nu}^T \dot{\mathbf{D}} \boldsymbol{\nu} + \beta \boldsymbol{\nu}^T (\mathbf{C} + \mathbf{C}^T) \begin{bmatrix} \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \\ &\quad - \rho \boldsymbol{\nu}^T (\mathbf{C} + \mathbf{C}^T) \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} - \delta \boldsymbol{\nu}^T (\mathbf{C} + \mathbf{C}^T) \mathbf{K}_I \mathbf{s} \end{aligned} \quad (6.27)$$

For å beregne resten av \dot{V} trenger vi et uttrykk for matrisen $\mathbf{P} \mathbf{F}$. Dette blir en mildt sagt enorm matrise og den er gjengitt i Appendix B. Vi setter inn (B.1) og (6.27) i (6.24) og får følgende uttrykk for \dot{V} :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \boldsymbol{\nu}^T (\dot{\mathbf{D}} - 2\mathbf{C}) \boldsymbol{\nu} - 2\boldsymbol{\nu}^T \mathbf{K}_D \boldsymbol{\nu} + \frac{\beta}{2} \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{E} \mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \\ &\quad + \rho \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + 2\boldsymbol{\nu}^T \mathbf{K}_I \mathbf{s} - \delta \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \mathbf{K}_I \tilde{\boldsymbol{\omega}} - 2k_{PR} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + 2k_{PP} \mathbf{v}^T \hat{\mathbf{p}} \\ &\quad - \beta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{E}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} (\mathbf{C} + \mathbf{K}_D) \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}^T \frac{\delta k_{PR}}{2k_{IR}} \mathbf{D} \mathbf{K}_I \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) \boldsymbol{\nu} \\ &\quad + (2k_{PR} + \beta k_{DR}) \|\mathbf{E}\| \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\omega} - \beta (\mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}})^T \mathbf{K}_{PR} (\mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}) - \beta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{E}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{K}_I \mathbf{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\rho k_{DP}\hat{\mathbf{p}}^T\mathbf{v} + \rho \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3^T & \hat{\mathbf{p}}^T \end{bmatrix} \mathbf{C}\boldsymbol{\nu} - (2k_{PP} + \rho k_{DP})\hat{\mathbf{p}}^T\mathbf{v} - \rho k_{PP}\hat{\mathbf{p}}^T\hat{\mathbf{p}} \\
& -\rho \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3^T & \hat{\mathbf{p}}^T \end{bmatrix} \mathbf{K}_I\mathbf{s} + \delta\mathbf{s}^T\mathbf{K}_I\mathbf{C}\boldsymbol{\nu} + \delta\mathbf{s}^T\mathbf{K}_I\mathbf{K}_D\boldsymbol{\nu} - \rho\boldsymbol{\nu}^T\mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} \\
& +\gamma\mathbf{s}^T\mathbf{K}_I\dot{\boldsymbol{\omega}} + \delta\mathbf{s}^T\mathbf{K}_I \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{PR}\mathbf{E}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} + \frac{k_{PR}}{k_{IR}}\mathbf{s}^T\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{K}_I\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}})\boldsymbol{\nu} + (2k_{PP} + \rho k_{DP})\hat{\mathbf{p}}^T\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\hat{\mathbf{p}} \\
& -\delta\mathbf{s}^T\mathbf{K}_I \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{K}_{PP}\hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} - \delta\mathbf{s}^T\mathbf{K}_I^2\mathbf{s} + 2\mathbf{s}^T\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{K}_I\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \gamma^2\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T\mathbf{K}_F\dot{\boldsymbol{\omega}} - \gamma\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T\mathbf{K}_I\tilde{\boldsymbol{\omega}} \\
& +2\boldsymbol{\nu}^T\mathbf{K}'_F\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \beta \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T\mathbf{E}^T & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \mathbf{K}'_F\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \frac{\gamma k_{PR}}{2k_{IR}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T\mathbf{K}_I\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}})\boldsymbol{\nu} \\
& -\rho \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3^T & \hat{\mathbf{p}}^T \end{bmatrix} \mathbf{K}'_F\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \delta\mathbf{s}^T\mathbf{K}_I\mathbf{K}'_F\tilde{\boldsymbol{\omega}} \\
& +\beta\boldsymbol{\nu}^T(\mathbf{C} + \mathbf{C}^T) \begin{bmatrix} \mathbf{E}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} - \rho\boldsymbol{\nu}^T(\mathbf{C} + \mathbf{C}^T) \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} - \delta\boldsymbol{\nu}^T(\mathbf{C} + \mathbf{C}^T)\mathbf{K}_I\mathbf{s} \\
& +(2k_{PR} + \beta k_{DR})\|\mathbf{E}\|\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T\boldsymbol{\omega} - (2k_{PR} + \beta k_{DR})\|\mathbf{E}\|\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T\hat{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\omega} \tag{6.28}
\end{aligned}$$

Her vil en del ledd oppheve hverandre, og vi benytter også at matrisen $(\dot{\mathbf{D}} - 2\mathbf{C})$ er skjevsymmetrisk ifølge teorem 2.5. Vi har derfor:

$$\boldsymbol{\nu}^T(\dot{\mathbf{D}} - 2\mathbf{C})\boldsymbol{\nu} = 0$$

og dessuten

$$\hat{\mathbf{p}}^T\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\hat{\mathbf{p}} = 0$$

6.4 Begrensning av \dot{V}

Påstand 6.1 *Det eksisterer regulatorparametre \mathbf{K}_P , \mathbf{K}_D , \mathbf{K}_F og \mathbf{K}_I og positive skalarer $\alpha_1, \dots, \alpha_5$, β , γ , δ og ρ slik at \dot{V} gitt av (6.28) er negativ semidefinit.* ■

Bevis:

For å vise dette er strategien å faktorisere (6.28) til negativt semidefinitte kvadratiske former. Dette gir oss:

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^{11} \dot{V}_i \leq 0 \tag{6.29}$$

der \dot{V}_i er gitt av:

- \dot{V}_1

$$\dot{V}_1 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\rho}{2}\mathbf{K}_{PP} & \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times 3} & \rho\mathbf{K}'_{FP} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \rho\mathbf{K}'_{FP} \end{bmatrix} & \frac{\gamma}{3}\mathbf{K}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}$$

- \dot{V}_2

$$\dot{V}_2 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\rho}{2} \mathbf{K}_{PP} & \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & k_{IP}(\rho - \delta k_{PP}) \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \\ k_{IP}(\rho - \delta k_{PP}) \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} & \frac{\delta}{3} \mathbf{K}_I^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}$$

- \dot{V}_3

$$\dot{V}_3 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ \tilde{\mathbf{w}} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{311} & \mathbf{P}_{312} & \mathbf{P}_{313} \\ \mathbf{P}_{321} & \mathbf{P}_{322} & \mathbf{P}_{323} \\ \mathbf{P}_{331} & \mathbf{P}_{332} & \mathbf{P}_{333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ \tilde{\mathbf{w}} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}^T$$

der

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{311} &= \frac{2}{3} \mathbf{K}_D \\ \mathbf{P}_{312} &= -(2\mathbf{K}'_F - \delta \mathbf{D} \mathbf{K}_I) \\ \mathbf{P}_{313} &= -(2\mathbf{K}_I + \delta \mathbf{K}_D \mathbf{K}_I - \delta \mathbf{C} \mathbf{K}_I) \\ \mathbf{P}_{321} &= -(2\mathbf{K}'_F - \delta \mathbf{D} \mathbf{K}_I) \\ \mathbf{P}_{322} &= \gamma \mathbf{K}_I \\ \mathbf{P}_{323} &= -\mathbf{K}_I (2\boldsymbol{\Lambda} - \delta \mathbf{K}'_F) \\ \mathbf{P}_{331} &= -(2\mathbf{K}_I + \delta \mathbf{K}_I \mathbf{K}_D - \delta \mathbf{K}_I \mathbf{C}^T) \\ \mathbf{P}_{332} &= -\mathbf{K}_I (2\boldsymbol{\Lambda} - \delta \mathbf{K}'_F) \\ \mathbf{P}_{333} &= \delta \mathbf{K}_I^2 \end{aligned} \tag{6.30}$$

- \dot{V}_4

$$\dot{V}_4 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}^T \mathbf{P}_4 \begin{bmatrix} \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}$$

der

$$\mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{3} \mathbf{K}_{PR} & \begin{bmatrix} \beta \mathbf{K}_{IR} - \delta \mathbf{K}_{IR} \mathbf{K}_{PR} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \beta \mathbf{K}_{IR} - \delta \mathbf{K}_{IR} \mathbf{K}_{PR} & \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} & \frac{\delta}{3} \mathbf{K}_I^2 - \begin{bmatrix} \frac{\rho}{2\alpha_5} \mathbf{K}_{PR} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Her er ligning (C.11) brukt.

- \dot{V}_5

$$\dot{V}_5 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{E}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \tilde{\boldsymbol{w}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\beta}{3} \mathbf{K}_{PR} & \beta \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{FR} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ \beta \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{Kf} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} & \frac{\gamma}{3} \mathbf{K}_I - \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2\alpha_4} \mathbf{K}_{PR} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \tilde{\boldsymbol{w}} \end{bmatrix}$$

Her er ligning (C.10) brukt.

- \dot{V}_6

$$\begin{aligned} \dot{V}_6 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{2} k_{PP} - \rho \alpha_3 \right) \hat{\boldsymbol{p}}^T \hat{\boldsymbol{p}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} k_{DP} - 2\rho \lambda_M - \frac{\rho \lambda_m}{\alpha_1} - \frac{\rho C_{\max}^2}{\alpha_3} \right) \mathbf{v}^T \mathbf{v} \end{aligned}$$

Her er ligningene (C.5),(C.6) og (C.9) brukt.

- \dot{V}_7

$$\dot{V}_7 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_\omega \mathbf{I}_{3 \times 3} & -(\|\mathbf{E}\| \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{E}) \\ -(\|\mathbf{E}\| \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{E}^T) & k_\epsilon \mathbf{E}^T \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix}$$

der

$$\begin{aligned} k_\omega &= \left(2k_{DR} - \frac{1}{2} (\alpha_4 \gamma + \alpha_5 \rho + 2\delta \lambda_M) k_{PR} - \beta \lambda_M - \frac{1}{2} \frac{\beta C_{\max}^2}{\alpha_2} - \rho \lambda_m \alpha_1 \Phi^2 \right) \\ k_\epsilon &= \left(\beta k_{PR} - \frac{\beta}{2} \alpha_2 \right) \end{aligned} \tag{6.31}$$

Her er ligningene (C.3), (C.4), (C.6), (C.8), (C.10) og (C.11) brukt.

- \dot{V}_8

$$\dot{V}_8 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_{comp} \\ \tilde{\boldsymbol{w}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \mathbf{K}_D & \gamma^2 \mathbf{K} \Delta \mathbf{K}_F \\ \gamma^2 \mathbf{K}_F \Delta \mathbf{K} & \frac{\gamma}{3} \mathbf{K}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_{comp} \\ \tilde{\boldsymbol{w}} \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \boldsymbol{\nu}_{fri}^T \mathbf{K}_D \boldsymbol{\nu}_{fri}$$

- \dot{V}_9

$$\dot{V}_9 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_{comp} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \mathbf{K}_D & \gamma \mathbf{K} \Delta \mathbf{K}_I \\ \gamma \mathbf{K}_I \Delta \mathbf{K} & + \frac{\delta}{3} \mathbf{K}_I^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_{comp} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \boldsymbol{\nu}_{fri}^T \mathbf{K}_D \boldsymbol{\nu}_{fri}$$

Det er i \dot{V}_8 og \dot{V}_9 brukt at $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}_{fri} + \boldsymbol{\nu}_{comp}$ og at $\dot{\boldsymbol{w}} = \Delta \mathbf{K} \boldsymbol{\nu}_{comp}$.

- \dot{V}_{10}

$$\dot{V}_{10} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \hat{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \mathbf{K}_{DR} & \rho \mathbf{C}_{12} \\ \rho \mathbf{C}_{12}^T & \frac{\rho}{2} \mathbf{K}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \hat{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix}$$

Der ligning (C.9) er brukt og $\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{C}$

- \dot{V}_{11}

$$\dot{V}_{11} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{E}\hat{\mathbf{e}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\mathbf{K}_{DP} & \beta\mathbf{C}_{21} \\ \beta\mathbf{C}_{21}^T & \frac{\beta}{3}\mathbf{K}_{PR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{E}\hat{\mathbf{e}} \end{bmatrix}$$

Der ligning (C.8) er brukt.

Vi vil nå se hvilke krav vi må stille til regulatorparametrene for at $\dot{V}_1, \dots, \dot{V}_{13}$ skal være negativt semidefinitte. Vi går da igjennom vektmatrise for vektmatrise og finner krav tilk disse.

- \dot{V}_1

$$\begin{aligned} \frac{\rho\gamma^2}{18}\mathbf{K}_{PP}\mathbf{K}_{IR}\mathbf{K}_{IP} - \frac{\rho^2\gamma}{3}(\mathbf{K}'_{FP})^2\mathbf{K}_{IR} &\geq \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ &\Downarrow \\ \frac{\gamma}{6}\mathbf{K}_{PP}\mathbf{K}_{IP} &\geq \rho(\mathbf{K}'_{FP})^2 \\ &\Downarrow \\ k_{PP}k_{IP} &\geq \frac{6\rho}{\gamma}(k'_{FP})^2 \end{aligned} \quad (6.32)$$

- \dot{V}_2

$$\begin{aligned} \frac{\rho\delta}{6}\mathbf{K}_{PP}\mathbf{K}_{IP}^2 - \mathbf{K}_{IP}^2(\rho - \delta k_{PP})^2 &\geq \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ &\Downarrow \mathbf{K}_{IP} > \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \frac{\rho\delta}{6}k_{PP} - (\rho - \delta k_{PP})^2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (6.33)$$

Vi antar nå

$$\delta < \frac{\rho}{k_{PP}} \quad (6.34)$$

slik at (6.33) gir en nedre begrensning på k_{PP} .

- \dot{V}_3

Vi regner ut de tre øvre venstre underdeterminantene i uttrykket for \dot{V}_3 og finner krav for at disse skal være positive:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{311} &\geq \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ &\Downarrow \\ \mathbf{K}_D &\geq \mathbf{0}_{6 \times 6} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Kravet (6.35) er oppfylt per antagelse.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathbf{P}_{311} & \mathbf{P}_{312} \\ \mathbf{P}_{321} & \mathbf{P}_{322} \end{vmatrix} &\geq \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_D \geq \frac{3}{2\gamma} \left(4(\mathbf{K}'_F)^2 \mathbf{K}_I^{-1} + \delta^2 \lambda_M^2 \mathbf{K}_I - 4\delta \mathbf{K}'_F \right) \quad (6.36)$$

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{P}_{311} & \mathbf{P}_{312} & \mathbf{P}_{313} \\ \mathbf{P}_{321} & \mathbf{P}_{322} & \mathbf{P}_{323} \\ \mathbf{P}_{331} & \mathbf{P}_{332} & \mathbf{P}_{333} \end{array} \right| \geq \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \Downarrow \end{array}$$

$$\mathbf{K}_D \geq \frac{3}{2} \left(\gamma \delta \mathbf{K}_I^3 - \mathbf{K}_I^2 (2\mathbf{A} - \delta \mathbf{K}'_F)^2 \right)^{-1} (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \quad (6.37)$$

der

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= -(2\mathbf{K}'_F - \delta \mathbf{D} \mathbf{K}_I) \\ &\quad \left\{ \delta (2\mathbf{K}'_F \mathbf{K}_I^2 - \delta \mathbf{D} \mathbf{K}_I^3) \right. \\ &\quad \left. + \left(2\mathbf{K}_I + \delta \mathbf{K}_I \mathbf{K}_D + \frac{\rho}{2} - \delta \mathbf{K}_I \mathbf{C}^T \right) \mathbf{K}_I (2\mathbf{A} - \delta \mathbf{K}'_F) \right\} \\ \mathbf{A}_2 &= (2\mathbf{K}_I + \delta \mathbf{K}_I \mathbf{K}_D - \delta \mathbf{K}_I \mathbf{C}^T) \\ &\quad \left\{ \delta (2\mathbf{K}'_F \mathbf{K}_I - \delta \mathbf{D} \mathbf{K}_I^2) + \gamma (2\mathbf{K}_I + \delta \mathbf{K}_I \mathbf{K}_D - \delta \mathbf{K}_I \mathbf{C}^T) \mathbf{K}_I \right\} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Vi velger nå $\delta \mathbf{K}_D$ tilstrekkelig liten slik at kravet som $\dot{V}_3 < 0$ gir kan oppsummeres som:

$$\mathbf{K}_D \geq \mathbf{G}(\mathbf{K}_F, \mathbf{K}_P, \mathbf{K}_I) \quad (6.39)$$

der \mathbf{G} bestemmes av det strengeste kravet av (6.36) og (6.37).

- \dot{V}_4

$$\begin{aligned} \frac{\beta \delta}{9} \mathbf{K}_{PR} \mathbf{K}_{IR}^2 &\geq \mathbf{K}_{IR}^2 (\beta - \delta k_{PR})^2 + \frac{\beta \delta}{12\alpha_3} \mathbf{K}_{PR}^2 \\ &\Downarrow \\ \mathbf{K}_{IR}^2 &\geq \frac{\rho \beta}{12\alpha_3} \left(\frac{19\beta \delta}{9} \mathbf{K}_{PR} - \delta^2 \mathbf{K}_{PR}^2 - \beta^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} \right)^{-1} \mathbf{K}_{PR}^2 \end{aligned} \quad (6.40)$$

For at overgangen skal være gyldig har vi analogt med \dot{V}_2 gjort antagelsen

$$\delta < \frac{\beta}{k_{PR}}. \quad (6.41)$$

- \dot{V}_5

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{3} \mathbf{K}_{PR} \left(\frac{\gamma}{3} \mathbf{K}_{IR} - \frac{\gamma}{2\alpha_4} \mathbf{K}_{PR} \right) &\geq \beta^2 (\mathbf{K}'_{FR})^2 \\ &\Downarrow \\ k_{PR} k_{IR} &\geq \frac{9\beta}{\gamma} (k'_{FR})^2 + \frac{3}{2\alpha_4} k_{PR}^2 \end{aligned} \quad (6.42)$$

- \dot{V}_6

$$k_{PP} \geq 2\alpha_3 \quad (6.43)$$

$$k_{DP} \geq \rho \left(2\lambda_M + \frac{\lambda_m}{\alpha_1} + \frac{C_{\max}^2}{\alpha_3} \right) \quad (6.44)$$

- \dot{V}_7

$$k_\omega k_\epsilon \|\mathbf{E}\|^2 \geq \|\|\mathbf{E}\|\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{E}\|^2 \quad (6.45)$$

Der k_ω og k_ϵ er gitt av:

$$\begin{aligned} k_\omega &= \left(2k_{DR} - \frac{1}{2}(\alpha_4\gamma + \alpha_5\rho + 2\delta\lambda_M)k_{PR} - \beta\lambda_M - \frac{1}{2}\frac{\beta C_{\max}^2}{\alpha_2} - \rho\lambda_m\alpha_1\Phi^2 \right) \\ k_\epsilon &= \left(\beta k_{PR} - \frac{\beta}{2}\alpha_2 \right) \end{aligned} \quad (6.46)$$

Trekantulikheten og ligning (A.2) gir oss:

$$\|\|\mathbf{E}\|\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{E}\| \leq 2\|\mathbf{E}\| \leq 4 \quad (6.47)$$

Vi setter inn (6.47) i (6.45) og får:

$$k_\omega k_\epsilon \geq 4 \quad (6.48)$$

Dessuten har vi at

$$k_\omega \geq 0 \quad (6.49)$$

og

$$k_\epsilon \geq 0 \quad (6.50)$$

må være oppfylt. Bruk av antagelsene (6.34) og (6.41) gir nedre begrensninger på k_{DR} og k_{PR} .

- \dot{V}_8

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{9}\mathbf{K}_D\mathbf{K}_I - \gamma^4\mathbf{K}_F\mathbf{K}^2\mathbf{K}_F &\geq \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ &\Downarrow \\ \mathbf{K}_D\mathbf{K}_I &\geq 9\gamma^3\mathbf{K}_F\mathbf{K}^2\mathbf{K}_F \end{aligned} \quad (6.51)$$

I tillegg får vi det trivielle kravet $\mathbf{K}_D \geq \mathbf{0}_{6 \times 6}$

- \dot{V}_9

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{9}\mathbf{K}_D\mathbf{K}_I^2 - \gamma^2\mathbf{K}_I\mathbf{K}^2\mathbf{K}_I &\geq \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ &\Downarrow \\ \mathbf{K}_D &\geq \frac{9\gamma^2}{\delta}\mathbf{K}^2 \end{aligned} \quad (6.52)$$

I tillegg får vi det trivielle kravet $\mathbf{K}_D \geq \mathbf{0}_{6 \times 6}$

- \dot{V}_{10}

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{6} \mathbf{K}_{DR} \mathbf{K}_{PP} - \rho^2 \mathbf{C}_{12}^T \mathbf{C}_{12} &\geq \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ &\Downarrow \\ k_{DR} k_{PP} &\geq 6\rho C_{\max}^2 \end{aligned} \quad (6.53)$$

Her er teorem 2.7 brukt.

- \dot{V}_{11}

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{6} \mathbf{K}_{DP} \mathbf{K}_{PR} - \beta^2 \mathbf{C}_{21}^T \mathbf{C}_{21} &\geq \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ &\Downarrow \\ k_{DP} k_{PR} &\geq 6\beta C_{\max}^2 \end{aligned} \quad (6.54)$$

Her er teorem 2.7 brukt.

Utfra alle disse kravene kan vi på følgende måte finne et sett med regulatorparametre som gjør \dot{V} negativ semidefinit: Først finner vi fra ligningene (6.33), (6.43) og (6.50) en nedre grense for \mathbf{K}_P gitt ved:

$$\mathbf{K}_P \geq \underline{\mathcal{C}}_1(\mathbf{K}_F, \mathbf{K}) \quad (6.55)$$

Så finner vi fra ligningene (6.32), (6.40) og (6.42) en nedre grense for \mathbf{K}_I :

$$\mathbf{K}_I \geq \underline{\mathcal{C}}_2(\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_F) \quad (6.56)$$

Til slutt finnes fra ligningene (6.39), (6.44), (6.49), (6.51), (6.52), (6.53) og (6.54) en nedre grense for \mathbf{K}_D :

$$\mathbf{K}_D \geq \underline{\mathcal{C}}_3'(\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_F, \mathbf{K}_I, \mathbf{K}) \quad (6.57)$$

Dermed er påstand 6.1 bevist. ■

6.5 Diskusjon og Konklusjon

Teorem 6.1 *Det eksisterer regulatorparametre \mathbf{K}_F , \mathbf{K}_P , \mathbf{K}_I og \mathbf{K}_D og positive skalarer $\alpha_1, \dots, \alpha_5$, β , γ , δ og ρ slik at systemet bestående av den dynamiske modellen (5.1) og regulatoren (5.15) er asymptotisk stabilt.*

Bevis:

Vi ser nå også på kravene for at $V > 0$. Dette legger ikke noen ytterligere begrensninger på \mathbf{K}_P . Fra ligningene (6.17) og (6.18) får vi kravet:

$$\mathbf{K}_I \leq \min \left\{ \frac{1}{\delta^2 \lambda_M} \mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Lambda} \mathbf{K}_F \right\} \triangleq \overline{\mathcal{C}}_2(\mathbf{K}_F) \quad (6.58)$$

Vi antar nå β og ρ så små at ligning (6.20) er oppfylt og ser fra ligningene (6.19) og (6.57) at vi får følgende krav til \mathbf{K}_D :

$$\mathbf{K}_D \geq \max \{ \mathcal{C}'_3(\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_F, \mathbf{K}_I, \mathbf{K}), 4\beta\lambda_M \mathbf{I}_{6 \times 6} \} \triangleq \mathcal{C}_3(\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_F, \mathbf{K}_I, \mathbf{K}) \quad (6.59)$$

Vi kan nå konkludere med at hvis ligningene

$$\mathcal{C}_1(\mathbf{K}_F, \mathbf{K}) \leq \mathbf{K}_P \quad (6.60)$$

$$\underline{\mathcal{C}}_2(\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_F) \leq \mathbf{K}_I \leq \bar{\mathcal{C}}_2(\mathbf{K}_F) \quad (6.61)$$

$$\mathcal{C}_3(\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_F, \mathbf{K}_I, \mathbf{K}) \leq \mathbf{K}_D \quad (6.62)$$

oppfylles i gitt rekkefølge og skalarene β , γ , δ og ρ oppfylder følgende punkter:

1. β og ρ velges tilstrekkelig små slik at ligning (6.20) oppfylles.

2.

$$\delta < \min \left\{ \frac{\rho}{k_{PP}}, \frac{\beta}{k_{PR}} \right\}$$

3. $\delta \mathbf{K}_D$ velges tilstrekkelig liten slik at ligning (6.39) oppfylles

så er

$$V > 0 \quad (6.63)$$

$$\dot{V} \leq 0 \quad (6.64)$$

og det dynamiske systemet gitt av ligning (5.1) med regulator (5.15) er stabilt. Vi merker oss at \mathbf{K}_F kan velges fritt og tilbakekoblingsforsterkningene \mathbf{K}_P , \mathbf{K}_I og \mathbf{K}_D bestemmes utfra dette valget. Siden β , γ , δ og ρ er frie parametre som ikke inngår i regulatoren kan de velges vilkårlig små og alle de tre punktene over kan derfor oppfylles siden de bare inneholder øvre begrensninger.

For å vise asymptotisk stabilitet må vi bruke LaSalles teorem (se Teorem 2.9). Fra ligning (6.28) ser vi at

$$\dot{V} \equiv 0 \quad (6.65)$$

⇓

$$\boldsymbol{\nu} \equiv \mathbf{0}_6, \hat{\boldsymbol{p}} \equiv \mathbf{0}_3, \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \equiv \mathbf{0}_3, \boldsymbol{s} \equiv \mathbf{0}_6 \text{ og } \tilde{\boldsymbol{w}} \equiv \mathbf{0}_6 \quad (6.66)$$

Totalt gir dette

$$\dot{V} \equiv 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{z} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{24} \quad (6.67)$$

slik at

$$V > 0 \text{ og } \dot{V} < 0 \forall \boldsymbol{z} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{24} \quad (6.68)$$

og systemet (5.1) med regulator (5.15) er asymptotisk stabilt om origo ifølge LaSalles teorem. ■

Vi bemerker at ligningene (6.51) og (6.52) inneholder krav som gjør at den nedre grensen

til \mathbf{K}_D er avhengig av stivhetsmatrisen \mathbf{K} . Men som vi også ser inngår parameteren γ i disse kravene i henholdsvis tredje og andre potens. Siden γ kan velges vilkårlig liten trengs kun et grovt øvre estimat av \mathbf{K} slik at vi beholder den gunstige egenskapen regulatoren har, nemlig å kunne styre kontaktkraft når kontaktflatens beskaffenhet er ukjent. Dette er også omtalt i [Chiaverini og Siciliano 1991].

Kapittel 7

Konklusjon

I denne hovedoppgaven har vi studert parallell kraft/posisjonsstyring for robotmanipulatorer.

Vi har presentert reguleringsstrategien som er gitt i [Chiaverini og Siciliano 1991] og [Chiaverini, Siciliano og Villani 1992] og gitt et bevis for at dette systemet er asymptotisk stabilt.

Med bakgrunn i dette har vi satt opp en modell for en robotmanipulator med en parallell kraft/moment/posisjon/orienteringsregulator. Manipulatoren har seks frihetsgrader. Robotkinematikken beskrives på $SE(3)$ og orienteringen til griperen parametriseres med Eulerparametre.

For å studere stabiliteten til dette systemet har vi foreslått en energibasert Lyapunovfunksjonskandidat med kryssledd. Vi har vist at denne LFK'en er en Lyapunovfunksjon med en negativ semidefinit tidsderivert. Ved hjelp av LaSalles teorem har vi vist at systemet er asymptotisk stabilt om en stasjonær tilstand, der vi oppnår ønsket kontaktkraft/moment og som ventet får et stasjonært avvik i posisjon/orientering.

Når det gjelder videre arbeid er det ønskelig å foreta simuleringer av reguleringsstrategien og på lang sikt også praktiske forsøk. En mulig utvidelse er bruk av regulatoren til overflatefølging.

Referanser

- [Arimoto og Miyazaki 1984] S. Arimoto and F. Miyazaki “Stability and robustness of PID feedback control for robot manipulators of sensory capability” in *Robotics Research: 1st Int. Symp.*, M. Brady and R.P. Paul (Eds), MIT Press Boston, MA, pp. 783–799, 1984.
- [Arnold 1989] V.I. Arnold *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag New York 1989.
- [Chiaverini og Siciliano 1991] S. Chiaverini and B. Siciliano “On the stability of a force/position control scheme for robot manipulators”, *Prepr. 3rd IFAC Symp. on robot control*, Vienna, A. 1991. pp. 371–376.
- [Chiaverini, Siciliano og Villani 1992] S. Chiaverini, B. Siciliano and L. Villani “A stable force/position controller for robot manipulators”, *Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control*, Tuscon, Arizona. December 1992. pp. 1869–1874.
- [Chiaverini og Sciavicco 1992] S. Chiaverini and L. Sciavicco “Edge-following strategies using the parallel control formulation”, *Proc. 1st IEEE Conf. on Control Applications*, Dayton, OH, pp. 31–36, 1992
- [Curtis 1979] M.L. Curtis *Matrix groups*, Springer-Verlag New York 1979.
- [DeShutter og Bruyninckx 1992] J. De Shutter and H. Bruyninckx “Model-based specification and execution of compliant motion”, *Tutorial M6, 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Nice, F, May 1992.
- [Doty, Melchiorri og Bonivento 1993] K.L. Doty, C. Melchiorri, C. Bonivento “A theory of Generalized Inverser Applied to Robotics” *The International Journal of Robotics Research*, vol 12. no. 1, February 1993.
- [Duffy 1990] J. Duffy “The Fallacy of Modern Hybrid Control Theory that is Based on “Orthogonal Complements” of Twist and Wrench Spaces”, *Journal of Robotic systems*, vol. 6, no. 2, pp. 139–144, 1990.
- [Egeland 1993] O. Egeland *Robotdynamikk* Oppdatert tilleggsnotat høsten 1993 i faget 43411 Robotmanipulatorer, ITK, NTH. September 1993.
- [Golub og Van Loan 1989] G.H. Golub and C.F. Van Loan *Matrix Computations*, 2nd ed., John Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1989.

- [Gravdahl, Egeland, Chiaverini og Siciliano] J.T. Gravdahl, O. Egeland, S. Chiaverini and B. Siciliano “Stability analysis in 6 DOF of force/position control of robot manipulators”, submitted to SY.RO.CO.'94, Capri, Italy, September 1994.
- [Khatib 1987] O. Khatib “A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation”, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 3, no. 1, pp. 43–53, 1987.
- [Koditschek 1988] D.E. Koditschek “Strict Global Lyapunov Functions for Mechanical Systems”, *Proc. 1988 American Control Conf.*, Atlanta, GA, June 1988. pp. 1770–1775.
- [Lončarić 1987] J. Lončarić “Normal forms of stiffness and compliance matrices”, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 3, no. 6, December 1987. pp. 567–572.
- [Perko 1991] L. Perko *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag New York 1991.
- [Samson 1991] C. Samson, M. Le Borgne and B. Espiau *Robot control: The task function approach*, Oxford Engineering Science Series, vol. 22. Oxford: Oxford university press 1991.
- [Siciliano og Villani 1992] B. Siciliano and L. Villani “An adaptive force/position regulator for robot manipulators”, *Invited paper for the 2nd Workshop on Adaptive Control: Applications to Nonlinear Systems and Robotics*, Cancun, México, 1992.
- [Spong og Vidyasagar 1989] M. Spong and M. Vidyasagar *Robot dynamics and control*, Wiley, New York 1989.
- [Strang 1988] G. Strang *Linear algebra and its applications*, Harcourt Brace Jovanovich, Inc. 1988.
- [Vidyasagar 1993] M. Vidyasagar *Nonlinear systems analysis*, Second Edition, Prentice-Hall inc. 1993.
- [Wen og Kreutz 1991] J.T. Wen and K. Kreutz-Delgado “The attitude control problem” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, no. 10. October 1991. pp. 1148–1162.
- [Whitney 1987] D.E. Whitney, “Historical perspective and state of the art in robot force control” *International Journal of Robotics Research*, vol. 6, no. 1, pp. 3–14, 1987.

Appendix A

Beregning av $\|\mathbf{E}\|$

Teorem A.1 *Matrisen $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gitt ved:*

$$\mathbf{E} = \eta_d \eta_\infty \mathbf{I}_{3 \times 3} + \eta_d \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_\infty) - \eta_\infty \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) + \boldsymbol{\epsilon}_d^T \boldsymbol{\epsilon}_\infty \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (\text{A.1})$$

der $\boldsymbol{\epsilon}$ og η er eulerparametre har en øvre begrensning gitt ved:

$$\|\mathbf{E}\| \leq 2 \quad (\text{A.2})$$

■

Bevis:

Vi har ifølge definisjonen på industert matrisenorm (se for eksempel [Strang 1988]):

$$\|\mathbf{E}\| = \sup_{\|\boldsymbol{\epsilon}\|=1} \|\mathbf{E}\boldsymbol{\epsilon}\| = \sup_{\|\boldsymbol{\epsilon}\|=1} \left\| \eta_d \eta_\infty \boldsymbol{\epsilon} + \eta_d \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_\infty) \boldsymbol{\epsilon} - \eta_\infty \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}_d^T \boldsymbol{\epsilon}_\infty \boldsymbol{\epsilon} \right\| \quad (\text{A.3})$$

Bruk av trekantulikheten gir oss:

$$\|\mathbf{E}\| \leq \sup_{\|\boldsymbol{\epsilon}\|=1} \left\{ \|\eta_d \eta_\infty \boldsymbol{\epsilon}\| + \|\eta_d \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_\infty) \boldsymbol{\epsilon}\| + \|\eta_\infty \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) \boldsymbol{\epsilon}\| + \|\boldsymbol{\epsilon}_d^T \boldsymbol{\epsilon}_\infty \boldsymbol{\epsilon}\| \right\} \quad (\text{A.4})$$

$$\|\mathbf{E}\| \leq \sup_{\|\boldsymbol{\epsilon}\|=1} \|\eta_d \eta_\infty \boldsymbol{\epsilon}\| + \sup_{\|\boldsymbol{\epsilon}\|=1} \|\eta_d \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_\infty) \boldsymbol{\epsilon}\| + \sup_{\|\boldsymbol{\epsilon}\|=1} \|\eta_\infty \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) \boldsymbol{\epsilon}\| + \sup_{\|\boldsymbol{\epsilon}\|=1} \|\boldsymbol{\epsilon}_d^T \boldsymbol{\epsilon}_\infty \boldsymbol{\epsilon}\|$$

Normen av en skjevsymmetrisk matrise er gitt ved:

$$\|\mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon})\| = \|\boldsymbol{\epsilon}\| \quad (\text{A.5})$$

Ved å sette inn (A.5) i (A.4) får vi:

$$\|\mathbf{E}\| \leq \eta_d \eta_\infty + \eta_d \sqrt{\boldsymbol{\epsilon}_\infty^T \boldsymbol{\epsilon}_\infty} + \eta_\infty \sqrt{\boldsymbol{\epsilon}_d^T \boldsymbol{\epsilon}_d} + \boldsymbol{\epsilon}_d^T \boldsymbol{\epsilon}_\infty \quad (\text{A.6})$$

Maksimum av dette uttrykket opptrer for $\boldsymbol{\epsilon}_\infty^\top \boldsymbol{\epsilon}_\infty = \frac{1}{2}$ og $\boldsymbol{\epsilon}_d^\top \boldsymbol{\epsilon}_d = \frac{1}{2}$. Dette gir $\eta_d \eta_\infty = \frac{1}{2}$ og $\boldsymbol{\epsilon}_d^\top \boldsymbol{\epsilon}_\infty = \frac{1}{2}$. Vi får dermed:

$$\|\mathbf{E}\| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \quad (\text{A.7})$$

■

Appendix B

Matrisen PF

$$PF = \begin{bmatrix} PF_{11} & \cdots & PF_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ PF_{51} & \cdots & PF_{55} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{24 \times 24} \quad (\text{B.1})$$

der matriseelementene PF_{11}, \dots, PF_{55} er gitt ved:

$$PF_{11} = -2(\mathbf{C} + \mathbf{K}_D) + \frac{\beta}{2}\mathbf{D} \begin{bmatrix} \hat{\eta}\mathbf{E} + \mathbf{E}\mathbf{S}(\hat{\epsilon}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} - \rho \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} - \frac{\delta k_{PR}}{2k_{IR}}\mathbf{D}\mathbf{K}_I\mathbf{H}(\hat{\epsilon})$$

$$PF_{12} = -2 \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{PR}\mathbf{E} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$PF_{13} = 2 \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{K}_{PP} \end{bmatrix} - \rho\mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{S}(\omega) \end{bmatrix}$$

$$PF_{14} = 2\mathbf{K}_I$$

$$PF_{15} = 2\mathbf{K}'_F - \delta\mathbf{D}\mathbf{K}_I$$

$$PF_{21} = -\beta \begin{bmatrix} \mathbf{E}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} (\mathbf{C} + \mathbf{K}_D) + \frac{1}{2}(2k_{PR} + \beta k_{DR})\|\mathbf{E}\| \begin{bmatrix} \hat{\eta}\mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathbf{S}(\hat{\epsilon}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$PF_{22} = -\beta\mathbf{E}^T\mathbf{K}_{PR}\mathbf{E}$$

$$PF_{23} = \mathbf{0}_{3 \times 3}$$

$$PF_{24} = -\beta \begin{bmatrix} \mathbf{E}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{K}_I$$

$$PF_{25} = -\beta \begin{bmatrix} \mathbf{E}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{K}'_F$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{PF}_{31} &= \rho \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} (\mathbf{C} + \mathbf{K}_D) + (2k_{PP} + \rho k_{DP}) \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\
\mathbf{PF}_{32} &= \mathbf{0}_{3 \times 3} \\
\mathbf{PF}_{33} &= -\rho \mathbf{K}_{PP} + (2\mathbf{K}_{PP} + \rho \mathbf{K}_{PR}) \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \\
\mathbf{PF}_{34} &= -\rho \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{K}_I \\
\mathbf{PF}_{35} &= -\rho \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{K}'_F \\
\\
\mathbf{PF}_{41} &= \delta \mathbf{K}_I (\mathbf{C} + \mathbf{K}_D) + \frac{k_{PR}}{k_{IR}} \Lambda \mathbf{K}_I \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) + \gamma \mathbf{K}_I \Delta \mathbf{K} (\mathbf{I}_{6 \times 6} - \mathbf{P}_T) \\
\mathbf{PF}_{42} &= \delta \mathbf{K}_I \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{PR} \mathbf{E} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\
\mathbf{PF}_{43} &= -\delta \mathbf{K}_I \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{K}_{PP} \end{bmatrix} \\
\mathbf{PF}_{44} &= -\delta \mathbf{K}_I^2 \\
\mathbf{PF}_{45} &= -\delta \mathbf{K}_I \mathbf{K}'_F + 2\Lambda \mathbf{K}_I \\
\\
\mathbf{PF}_{51} &= -\frac{\gamma k_{PR}}{2k_{IR}} \mathbf{K}_I \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) - \gamma^2 \mathbf{K}_F \Delta \mathbf{K} (\mathbf{I}_{6 \times 6} - \mathbf{P}_T) \\
\mathbf{PF}_{52} &= \mathbf{0}_{3 \times 6} \\
\mathbf{PF}_{53} &= \mathbf{0}_{3 \times 6} \\
\mathbf{PF}_{54} &= \mathbf{0}_{6 \times 6} \\
\mathbf{PF}_{55} &= -\gamma \mathbf{K}_I
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Vi bemerker at matrisen $\mathbf{A} = (\mathbf{F}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{F})$ fremkommer ved å velge

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{ii} &= \mathbf{P} \mathbf{F}_{ii}, \quad i = 1, \dots, 5 \\
\mathbf{A}_{ij} &= \frac{1}{2} (\mathbf{P} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{P} \mathbf{F}_{ji}), \quad i, j = 1, \dots, 5 \\
\mathbf{A}_{ji} &= \mathbf{A}_{ij}^T
\end{aligned} \tag{B.3}$$

slik at

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{51} & \cdots & \mathbf{A}_{55} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{24 \times 24}. \tag{B.4}$$

Appendix C

Begrensning av produkter

I dette kapittelet viser vi hvordan en del kryssledd i uttrykket for \dot{V} kan gis en øvre begrensning. I den forbindelse gjøres bruk av følgende teorem:

Teorem C.1

$$ab \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{c} + cb^2 \right), \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall c > 0 \in \mathbb{R} \quad (\text{C.1})$$

der a og b er gitte tall og c er en tilfeldig positiv konstant. ■

Bevis:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{c} - b \right)^2 &\geq 0, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall c \neq 0 \in \mathbb{R} \\ \frac{a^2}{c^2} + b^2 - 2\frac{ab}{c} &\geq 0 \\ \frac{ab}{c} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{c^2} + b^2 \right) \\ ab &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{c} + cb^2 \right), \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall c > 0 \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

■

$$\begin{aligned} -\frac{\beta}{2} \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{E} \mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} &\leq \frac{\beta \lambda_m}{2} (\|\mathbf{E}\| + \|\mathbf{E} \mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}})\|) \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \\ -\frac{\beta}{2} \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{E} \mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} &\leq 2\beta \lambda_m \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Da $\hat{\eta} \leq 1$, $\|\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}})\| \leq 1$ og $\|\mathbf{E}\| \leq 2$. Dessuten er ligning 6.7 benyttet. ■

$$-\frac{\delta k_{PR}}{2k_{IR}} \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \mathbf{K}_I \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) \boldsymbol{\nu} \leq \frac{\delta k_{PR} \lambda_M}{2} \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \quad (\text{C.4})$$

Her er ligning 6.7 benyttet. ■

$$\rho \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{R} \mathbf{v} \end{bmatrix} \leq \rho \lambda_M \|\mathbf{v}\|^2 \quad (\text{C.5})$$
■

$$\begin{aligned} -\rho \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} &\leq \frac{\rho \lambda_m}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \hat{\mathbf{p}} \\ &\leq \frac{\rho \lambda_m}{2} \left(\frac{\|\mathbf{v}\|^2}{\alpha_1} + \alpha_1 \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \|\hat{\mathbf{p}}\|^2 \right) \\ &\leq \frac{\rho \lambda_m}{2} \left(\frac{\|\mathbf{v}\|^2}{\alpha_1} + \alpha_1 \Phi^2 \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Her har vi benyttet at $\|\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\| = \|\boldsymbol{\omega}\|$. Dessuten er ligning 6.7 benyttet og vi har antatt at initialverdien på posisjonsfeilen er begrenset. Det vil si

$$\|\hat{\mathbf{p}}(t=0)\| \leq \Phi < \infty \quad (\text{C.7})$$

på samme måte som i ligning (4.12). ■

$$-\frac{\beta}{2} \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \leq \frac{\beta}{4} \left(\frac{C_{\max}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|^2}{\alpha_2} + \alpha_2 \|\mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}\|^2 \right) - \frac{\beta}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{C}_{21} \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{C.8})$$

Her er teorem 2.7 benyttet. ■

$$-\rho \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \leq \frac{\rho}{2} \left(\frac{C_{\max}^2 \|\mathbf{v}\|^2}{\alpha_3} + \alpha_3 \|\hat{\mathbf{p}}\|^2 \right) - \rho \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{C}_{12} \hat{\mathbf{p}} \quad (\text{C.9})$$

Her er teorem 2.7 benyttet. ■

$$\begin{aligned} -\frac{\gamma k_{PR}}{2k_{IR}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \mathbf{K}_I \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) \boldsymbol{\nu} &= -\frac{\gamma k_{PR}}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{h} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ &= -\frac{\gamma k_{PR}}{2} \tilde{\mathbf{f}}^T (\mathbf{h} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T) \boldsymbol{\omega} \\ &\leq \frac{\gamma k_{PR}}{4} \left(\frac{\|\tilde{\mathbf{f}}\|^2}{\alpha_4} + \alpha_4 \|\mathbf{h} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\omega}\|^2 \right) \\ &\leq \frac{\gamma k_{PR}}{4} \left(\frac{\|\tilde{\mathbf{f}}\|^2}{\alpha_4} + \alpha_4 \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \right) \\ &\leq \frac{\gamma k_{PR}}{4} \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_4} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\nu}^T \begin{bmatrix} \alpha_4 \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \right) \\ &\leq \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{4\alpha_4} \mathbf{K}_{PR} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\nu}^T \begin{bmatrix} \frac{\alpha_4 \gamma}{4} \mathbf{K}_{PR} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

■

$$\begin{aligned}
\frac{k_{PR}}{2k_{IR}} \mathbf{s}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{K}_I \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) \boldsymbol{\nu} &= \frac{\rho}{2} \mathbf{s}^T \begin{bmatrix} \mathbf{h} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \\
&= \frac{\rho}{2} \mathbf{s}^T (\mathbf{h} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T) \boldsymbol{\omega} \text{ der } \mathbf{s}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T & \mathbf{s}_2^T \end{bmatrix} \\
&\leq \frac{\rho}{4} \left(\frac{\|\mathbf{s}_1\|^2}{\alpha_5} + \alpha_5 \|\mathbf{h} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\omega}\|^2 \right) \\
&\leq \frac{\rho}{4} \left(\frac{\|\mathbf{s}_1\|^2}{\alpha_5} + \alpha_5 \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \right) \\
&\leq \frac{\rho}{4} \left(\mathbf{s}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_5} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{s} + \boldsymbol{\nu}^T \begin{bmatrix} \alpha_5 \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \right) \\
&\leq \mathbf{s}^T \begin{bmatrix} \frac{\rho}{4\alpha_5} \mathbf{K}_{PR} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{s} + \boldsymbol{\nu}^T \begin{bmatrix} \frac{\alpha_5 \rho}{4} \mathbf{K}_{PR} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \quad (\text{C.11})
\end{aligned}$$

■